REPUBLIKA SLOVENIJA | MINISTRSTVO ZA ŠOLSTVO IN ŠPORT

TŠC Nova Gorica
BIOTEHNIŠKA ŠOLA

Naložba v vašo prihodnost
OPERACIJO DELNO FINANCIRA EVROPSKA UNIJA
Evropski socialni sklad

Kvadratna funkcija

Mišo Krog

Srednje strokovno izobraževanje: Kmetijski tehnik, tehniki

Modul: MATEMATIKA

Naslov: Kvadratna funkcija

Gradivo za 2.letnik SSI

Avtor: Mišo Krog

Strokovni recenzent: Janja Barber Rojc, prof. mat.

Lektor: Severin Drekonja, dipl. komp.

Šempeter pri Gorici, 2011

Gradivo je sofinancirano iz sredstev projekta Biotehniška področja, šole za življenje in razvoj (2008-2012).

Operacijo delno financira Evropska unija iz Evropskega socialnega sklada ter Ministrstvo za šolstvo in šport. Operacija se izvaja v okviru operativnega programa razvoja človeških virov za obdobje 2007 – 2013, razvojne prioritete: Razvoj človeških virov in vseživljenjskega učenja, prednostna usmeritev Izboljšanje kakovosti in učinkovitosti sistemov izobraževanja in usposabljanja.

Vsebina

Kazalo slik

Definicija

Kvadratno funkcijo definiramo kot realno funkcijo (preslikavo) ene spremenljivke s predpisom:

$$\boxed{f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,}$$

kjer so koeficienti a, b in $c \in \mathbb{R}$ ter za a velja $a \neq 0$.

Konstanto $c \in \mathbb{R}$ imenujemo <u>prosti koeficient</u>, konstanto $a \in \mathbb{R}$ pa <u>vodilni koeficient</u> in zanjo mora veljati zgoraj omenjeni pogoj $a \neq 0$. Konstanto $b \in \mathbb{R}$ pa imenujemo <u>linearni koeficient</u>.

A <u>*Pomni*</u>:

Funkcijo:

$$f : \quad \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

imenujemo <u>realna funkcija</u>, saj vsakemu $x \in \mathbb{R}$ priredi vrednost v množici realnih števil.

$$f : \quad x \mapsto a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Iz zgornjega predpisa (*število* x *kvadriramo in nato pomnožimo s konstanto* a, *dobljenemu produktu prištejemo produkt števila* x *in konstante* b *ter prištejemo konstanto* c) hitro opazimo, da res za kakršnokoli število $x \in \mathbb{R}$ vedno dobimo neko vrednost (ki je tudi $\in \mathbb{R}$). <u>Zato lahko sklepamo, da je funkcija definirana za vsako realno število</u>.

Iz tega sledi, da je <u>*definicijsko območje*</u>: $D_f = \mathbb{R}$. O vrednostih, ki jih taka funkcija zajame (zalogi vrednosti) pa več v nadaljevanju.

<u>Pomen koeficientov</u>:

Iz predpisa kvadratne funkcije:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

hitro vidimo, da v primeru, ko je $a = 0$, ni več govora o kvadratni funkciji, saj dobimo:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \cdot x^2 + bx + c \\ f(x) &= bx + c, \end{aligned}$$

kar pa vidimo, da je v bistvu linearna funkcija...

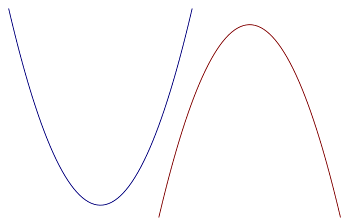
V primeru, da je pa $a = b = 0$, pa dobimo:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + c \\ f(x) &= c, \end{aligned}$$

kar pa je konstantna funkcija.

Zato, kadar govorimo o kvadratni funkciji, upoštevamo da je $a \neq 0$.

Graf kvadratne funkcije je **parabola** – glej Sliko 1 (več podrobnosti o grafih pa v nadaljevanju).



Slika 1: Paraboli

V tem razdelku ste izvedeli nekaj splošnih stvari o predpisu kvadratne funkcije (*tista funkcija, ki ima najvišji člen v predpisu* ax^2).

Družina funkcij $f(x) = a \cdot x^2$

V tem razdelku bomo obravnavali kvadratno funkcijo $f(x) = ax^2 + bx + c$ v primeru, ko imamo koeficienta $b = c = 0$, tako dobimo funkcijo $f(x) = ax^2$ in različne možnosti za izbiro vrednosti koeficienta $a \in \mathbb{R}$.

Za začetek si bomo ogledali najbolj enostavno različico, ko je $a = 1$.

Funkcija $f(x) = x^2$

Za zgled, na katerega se bomo opirali skozi nadaljnje razdelke razlage kvadratne funkcije, si bomo ogledali primer funkcije, ko so v predpisu:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

koeficienti: $a = 1$, $b = 0$ in $c = 0$. Torej:

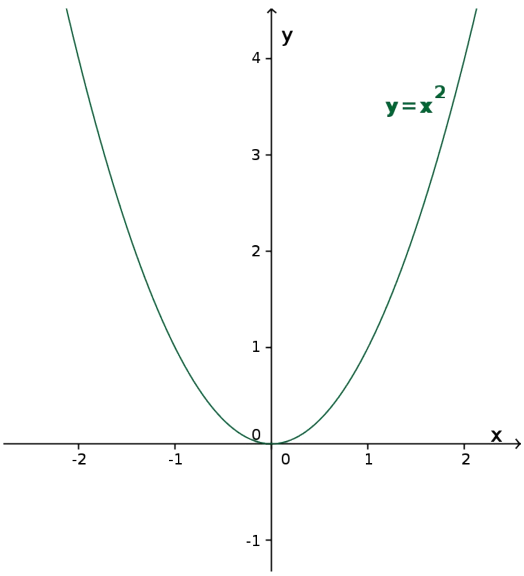
$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \\ f(x) &= x^2. \end{aligned}$$

Opazimo, da je funkcija $f(x) = x^2$ <u>soda</u> (velja pogoj $f(-x) = f(x)$):

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ f(-x) &= (-x)^2 \\ f(-x) &= x^2 \\ f(-x) &= f(x). \end{aligned}$$

Tabelirajmo funkcijo in narišimo njen graf. Ker je funkcija soda, je njen graf simetričen glede na ordinatno os (glej Sliko 2).

x	$y = x^2$
-2	4
-1	1
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1
2	4



Slika 2: Parabola $y = x^2$

Povejmo še nekaj podrobnosti o funkciji $f(x) = x^2$.

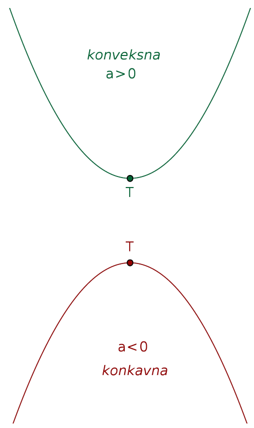
Njen graf (parabola, ki pripada enačbi $y = x^2$ - Slika 2) ima **teme** v točki $(0; 0)$ - koordinatno izhodišče. Teme je tista točka, v kateri parabola doseže <u>minimalno (ali maksimalno)</u> vrednost. *Na paraboli vidimo teme kot točko, kjer se parabola obrne*.

Prav tako je koordinatno izhodišče (dvojna) ničla parabole, saj ima enačba $0 = x^2$ rešitvi $x_1 = 0$ in $x_2 = 0$.

Katerokoli realno vrednost izberemo spremenljivki x, bomo vedno dobili neko realno vrednost izraza x^2, kar pomeni, da je funkcija definirana za vsa realna števila. Zapišemo: $D_f = \mathbb{R}$.

Vrednost izraza x^2 lahko zajame samo pozitivna realna števila in ko je $x = 0$, tudi število nič, kar pa predstavlja zalogo vrednosti. Zapišemo: $Z_f = \mathbb{R}_0^+$

Funkcije $f(x) = ax^2$

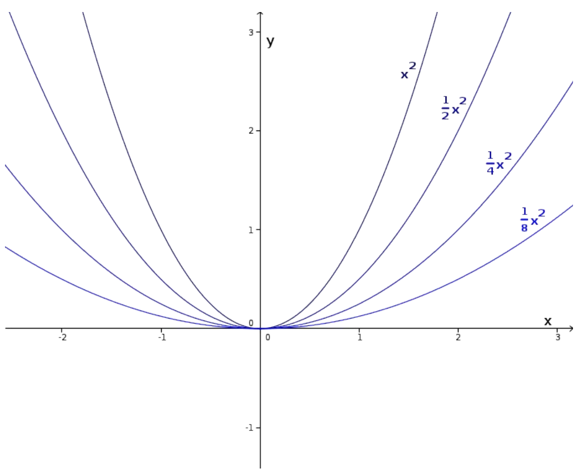


Slika 3: Pomen parametra a

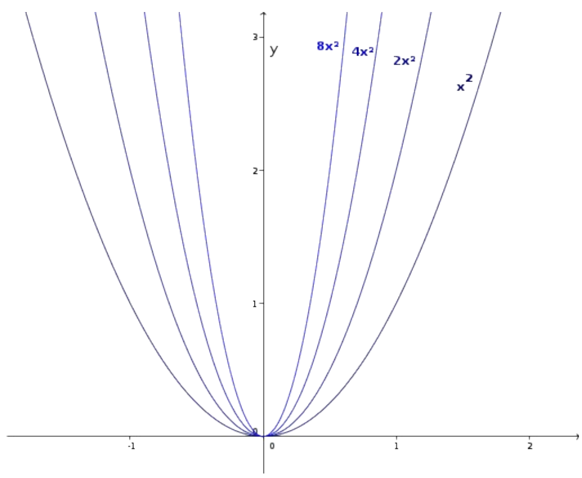
Če malo podrobneje opazujemo parameter $a \in \mathbb{R}$, opazimo bistveno razliko pri krivuljah $y = ax$, ko je $a > 0$ in ko je $a < 0$.

- V prvem primeru so vrednosti $f(x)$ za vse izbrane $x \in \mathbb{R}$ vedno pozitivne ali enake nič – graf funkcije, ko je $a > 0$, je konveksna krivulja in teme parabole takrat predstavlja njen <u>minimum</u> (kot pri $f(x) = x^2$). V drugem primeru, ko je $a < 0$, pa vedno dobimo negativno vrednost $f(x)$ ali pa enako nič, graf funkcije pa je tokrat konkavna krivulja, teme pa v tem primeru <u>maksimum</u> (glej Sliko 3).

- Vodilni koeficient $a \in \mathbb{R}$ pa ne vpliva samo na konveksnost, konkavnost in značej temena, ampak tudi na <u>strmino</u> grafa $f(x) = ax^2$ in pomeni razteg oz. skrčitev grafa v smeri ordinatne osi. Večja kot je absolutna vrednost vodilnega člena $(|a|)$, strmejši je graf funkcije $f(x)$ in obratno: manjša kot je $|a|$, položnejši je graf (glej Sliki 4 in 5).



Slika 4: 0<a<1



Slika 5: a>1

Slika 4 prikazuje, kako je graf funkcije $f(x) = ax^2$ bolj položen, manjši kot je a 2 R - glede na osnoven graf $f(x) = x^2$, a pa izbiramo po ključu: $0 < a < 1$. Slika prikazuje primerjavo funkcijskih vrednosti $f(x) = ax^2$, ko je $a = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{4}$, in $a = \frac{1}{8}$. Te so prikazane tudi v spodnjih tabelah (za $a = 1$ jih poznamo že iz strani 6).

x	$y = \frac{1}{2}x^2$
¡ 1	$\frac{1}{2}$
0	0
1	$\frac{1}{2}$
2	2

x	$y = \frac{1}{4}x^2$
¡ 1	$\frac{1}{4}$
0	0
1	$\frac{1}{4}$
2	1

x	$y = \frac{1}{8}x^2$
¡ 1	$\frac{1}{8}$
0	0
1	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{2}$

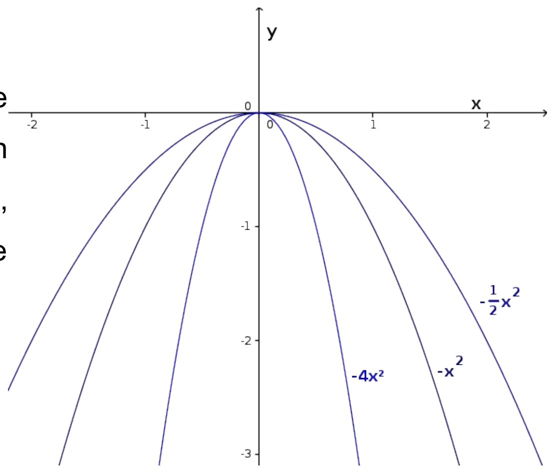
Slika 5 prikazuje da je graf funkcije $f(x) = ax^2$ bolj strm, tem večji kot je a 2 R - če za osnoven graf vzamemo graf funkcije $f(x) = x^2$, parametre pa izbiramo take, da velja $a > 1$. Slika prikazuje primerjavo funkcijskih vrednosti $f(x) = ax^2$, ko je $a = 2$, $a = 4$ in $a = 8$. Primerjava funkcijskih vrednosti je prikazana tudi v spodnjih tabelah (za $a = 1$ jih poznamo že iz strani 6).

x	$y = 2x^2$
¡ 1	2
0	0
1	2
2	8

x	$y = 4x^2$
¡ 1	4
0	0
1	4
2	16

x	$y = 8x^2$
¡ 1	8
0	0
1	8
2	32

Do sedaj smo grafično primerjali funkcijske vrednosti, ko je $a > 0$. Pri negativnih realnih vrednostih vodilnega koeficienta, torej ko je $a < 0$, delamo na enak način kot prej, le da še



Slika 6: a<0

upoštevamo, da je graf take funkcije zrcaljen preko abcisne osi, saj bodo vse dobljene funkcijske vrednosti negativne. $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}_0^-$

x	$y = -4x^2$
-1	-4
0	0
1	-4

x	$y = -\frac{1}{2}x^2$
-1	$-\frac{1}{2}$
0	0
1	$-\frac{1}{2}$

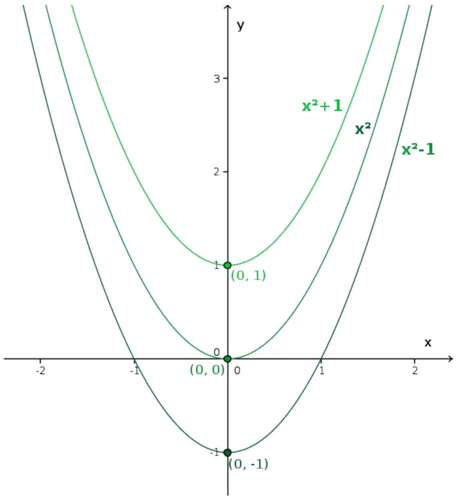
Družina funkcij $f(x) = a \cdot x^2 + c$

V tem razdelku bomo obravnavali kvadratno funkcijo $f(x) = ax^2 + bx + c$ v primeru, ko imamo koeficient linearnega člena $b = 0$, tako da dobimo funkcijo $f(x) = ax^2 + c$ in različne možnosti za izbiro vrednosti koeficientov $a; c \in \mathbb{R}; \quad a \neq 0$.

Bistvo tega razdelka lahko povemo na kratko: **koeficient** c **določa togi premik grafa** $f(x) = ax^2$ **vzdolž ordinatne osi za vrednost** c **in sicer:**

- **če velja, da je** $c < 0$**, potem premaknemo** $f(x) = ax^2$ **za** $|c|$ **navzdol,**
- **če pa je** $c > 0$**, potem pa premaknemo** $f(x) = ax^2$ **za** $|c|$ **navzgor**.

Slika 7 nam pokaže, kako se v primeru $f(x) = x^2$ *premakne graf* $f(x)$*: za* 1 *navzgor, ko je* $c = 1$*, in za* 1 *navzdol, ko je* $c = -1$.

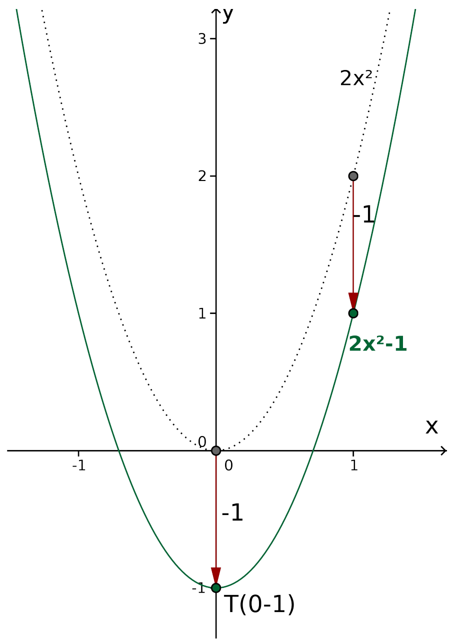


Slika 7: Togi premiki

Oglejmo si povedano še na nekaj primerih:

ZGLED 1:

V koordinatni sistem narišite graf funkcije $f(x) = 2x^2 - 1$, označite teme parabole in zapišite



Slika 8: Zgled 1

zalogo vrednosti funkcije $f(x)$.

Funkcijo lahko najprej tabeliramo:

x	$y = 2x^2 - 1$
-1	1
0	-1
1	1
2	7

Iz predpisa razberemo, da je $a = 2$ *in* $c = -1$. *Pri risanju si lahko pomagamo z grafom funkcije* $f(x) = 2x^2$, *ki je za* 1 *premaknjen navzdol. (Slika 8)*

Na grafu označimo še teme, ki je sedaj v točki $(0; -1)$ *in predstavlja minimum. Teme je glede na krivuljo* $2x^2$ *premaknjeno za* 1 *navzdol.*

Zaloga vrednosti funkcije je tako $Z_f : [-1; \infty)$.

ZGLED 2:

V koordinatni sistem narišite graf funkcije $f(x) = -x^2 + 1$, označite teme parabole in zapišite zalogo vrednosti funkcije $f(x)$.

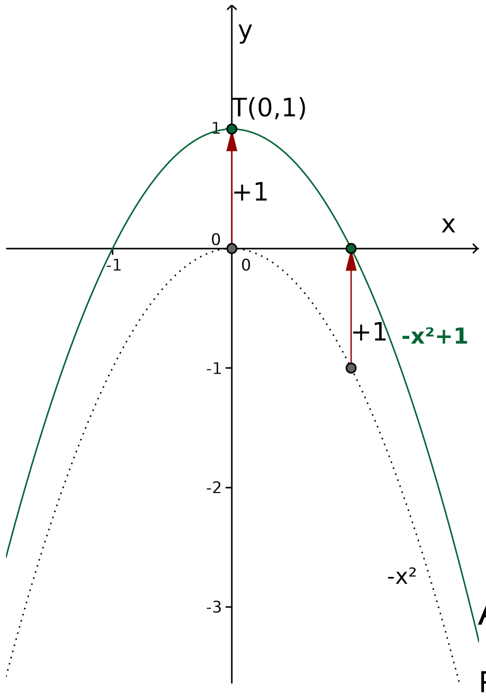
Funkcijo lahko najprej tabeliramo:

x	$y = -x^2 + 1$
-1	0
0	1
1	0
2	-3

Iz predpisa razberemo, da je $a = -1$ *in* $c = +1$, *in si pri risanju pomagamo z grafom funkcije* $f(x) = -x^2$, *ki je za* 1 *premaknjen navzgor. (Slika 9)*

Na grafu označimo še teme, ki je sedaj v točki $(0; 1)$ *in predstavlja maksimum. Teme je glede na krivuljo* $y = -x^2$ *premaknjeno za* 1 *navzgor.*

Zaloga vrednosti funkcije pa je $Z_f : (-\infty; 1]$.



Slika 9: Zgled 2

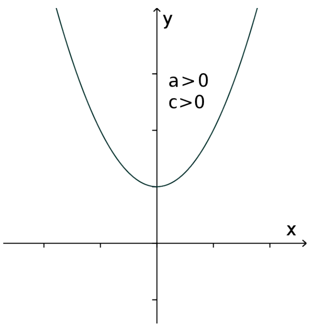
A Povzemimo:

Pri kvadratni funkciji s predpisom $f(x) = ax^2 + c$ smo pozorni na povečanje/zmanjšanje funkcijskih vrednosti *"osnovne funkcije"* ax^2 za vrednost parametra $c \in \mathbb{R}$.

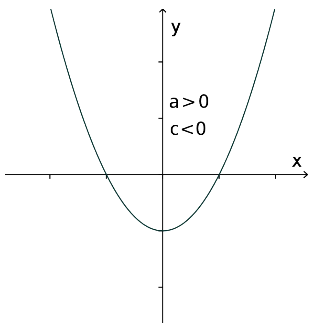
Vsaka točka $(x; y)$ grafa $y = ax^2$ se tako premakne v $(x; y + c)$. Npr: če je bilo teme parabole $y = ax^2$ v točki $T(0; 0)$, bo za parabolo z enačbo $y = ax^2 + c$ v točki $(0; 0 + c)$ oziroma v $T(0; c)$.

Zaloga vrednosti se iz osnovne $Z_f : [0; \infty)$ spremeni na $Z_f : [c; \infty)$. Pozorni bodimo, ko je $a < 0$ je zaloga vrednosti $Z_f : (-\infty; c]$.

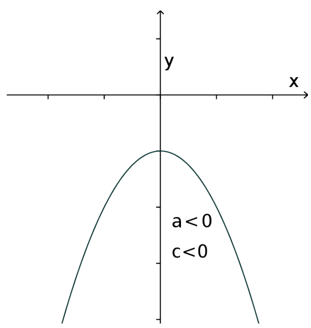
Na splošno lahko ločimo:



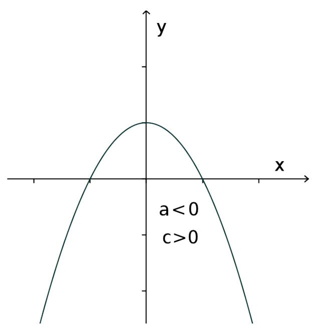
Slika 10: a>0, c>0



Slika 11: a>0, c<0



Slika 12: a<0, c<0



Slika 13: a<0, c>0

VAJE:

1. V istem koordinatnem sistemu narišite grafe funkcij.

   a) $f(x) = x^2$

   b) $g(x) = 3x^2$

   c) $h(x) = 5x^2$

2. V istem koordinatnem sistemu narišite grafe funkcij.

   a) $f(x) = x^2$

   b) $g(x) = \frac{1}{3}x^2$

   c) $h(x) = \frac{1}{5}x^2$

3. V istem koordinatnem sistemu narišite grafe funkcij.

   a) $f(x) = 1{,}5x^2$

   b) $g(x) = \frac{5}{2}x^2$

   c) $h(x) = \frac{3}{4}x^2$

4. V istem koordinatnem sistemu narišite grafe funkcij.

   a) $f(x) = -x^2$

   b) $g(x) = -2x^2$

   c) $h(x) = -\frac{2}{3}x^2$

5. V istem koordinatnem sistemu narišite grafe funkcij.

   a) $f(x) = -2\frac{1}{2}x^2$

   b) $g(x) = -1\frac{1}{3}x^2$

   c) $h(x) = -x^2 + 2$

6. Zapišite enačbo parabole, ki ima teme v koordinatnem izhodišču in poteka skozi točko $T(-1; 2)$. Parabolo tudi narišite.

7. Parabola z enačbo $y = ax^2$ poteka skozi točko $(\frac{3}{2}; \frac{1}{4})$. Zapišite njeno enačbo in parabolo tudi narišite.

8. Parabola s temenom v koordinatnem izhodišču seka simetralo sodih kvadrantov pri $x = 2$. Zapišite njeno enačbo, parabolo in simetralo sodih kvadrantov narišite.

9. V istem koordinatnem sistemu narišite grafa funkcij.

   a) $f(x) = x^2 + 3$

   b) $g(x) = x^2 - 2$

10. V istem koordinatnem sistemu narišite grafa funkcij.

    a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1$

    b) $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1$

11. Graf kvadratne funkcije ima teme v točki T(0,-1) , abcisno os pa seka pri $x = 2$. Zapišite enačbo funcije in narišite njen graf.

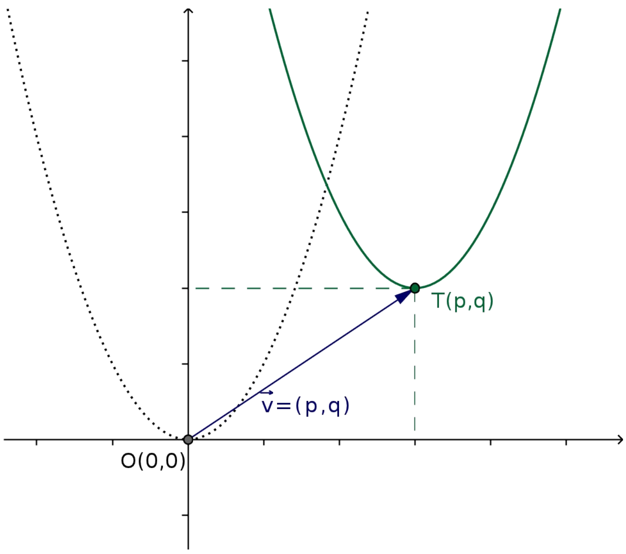
12. Graf kvadratna funkcija $f(x) = ax^2 + c$ poteka skozi točki $A(-1; \frac{1}{3})$ in $B(3; -5)$. Poiščite njen predpis in narišite njen graf.

13. Parabola z enačbo $y = ax^2 + c$ seče simetralo lihih kvadrantov pri $x = -4$ in pri $x = 1$. Zapišite njeno enačbo ter parabolo in simetralo narišite.

Družina funkcij $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Če bi želeli družino parabol $y = ax^2$ s temenom v koordinatnem izhodišču premakniti po koordinatnem sistemu tako, da bi imela teme v točki $T(p;q)$, bi morali v enačbi parabol upoštevati premik tako:

$$(y - q) = a(x - p)^2.$$



Slika 14: Premik parabole za vektor v

Vsaka točka osnovne parabole $y = ax^2$ bi bila po abcisni osi premaknjena za parameter $p \in \mathbb{R}$ in po ordinatni osi za parameter $q \in \mathbb{R}$ (dejanjsko gre za premik krivulje $y = ax^2$ za vektor $\vec{v} = (p;q)$).

Z malo preurajanja zgornje enačbe dobimo:

$$\begin{aligned} y - q &= a(x^2 - 2px + p^2) \\ y - q &= ax^2 - 2apx + ap^2 \\ y &= ax^2 - 2apx + ap^2 + q; \end{aligned}$$

kar je enako enačbi $y = ax^2 + bx + c$, zato enačimo po koeficientih in dobimo:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= ax^2 - 2apx + ap^2 + q \\ b &= -2ap \\ c &= ap^2 + q; \end{aligned}$$

iz česar sledi, da je $p = \frac{-b}{2a}$, q pa dobimo tako:

$$\begin{aligned} q &= -a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + c \\ &= -\frac{b^2}{4a} + c \\ q &= -\frac{b^2 - 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

Torej iz enačbe parabole $y = ax^2 + bx + c$ enostavno določimo koordinati temena $T(p;q)$, ker poznamo parametre $a; b; c \in \mathbb{R}$ na omenjen način. Zapišimo še enkrat:

$$T\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right).$$

Če preuredimo na prejšnji strani nastavljeno enačbo:

$$(y-q) = a(x-p)^2$$

v enačbo:

$$y = a(x-p)^2 + q,$$

tak zapis imenujemo <u>**temenska oblika**</u> zapisa enačbe parabole (v njej imamo izraženo teme parabole). Torej do sedaj znamo enačbo parabole zapisati na dva načina:

- $y = ax^2 + bx + c$ je <u>splošen zapis</u> enačbe parabole, v njem so nam znane vrednosti vseh treh koeficientov – $a; b; c \in \mathbb{R}$;
- $y = a(x-p)^2 + q$ je <u>temenski zapis</u> enačbe parabole, v njem imamo znani koordinati temena parabole $T(p; q)$.

Izraz $b^2 - 4ac$, ki nastopa v ordinati temena $q = -\frac{b^2-4ac}{4a}$, imenujemo <u>**diskriminanta**</u> in jo označimo:

$$D = b^2 - 4ac.$$

Ordinato temena lahko tudi pišemo krajše: $q = -\frac{D}{4a}$. O diskriminantinem pomenu pa marsikaj več v naslednjih razdelkih.

<u>ZGLED 3</u>:

V koordinatni sistem nariši parabolo $y = -x^2 + 6x - 10$. Zapiši enačbo parabole v temenski obliki in zapiši njeno zalogo vrednosti.

Najprej si pomagamo s predpisom, iz katerega vidimo, da bo to zaradi vodilnega člena $a = -1$ *nekam po koordinatnem sistemu premaknjena parabola* $y = -x^2$ *(to si tudi narišemo). Poiščemo, kam se prestavi teme parabole* $T(p; q)$:

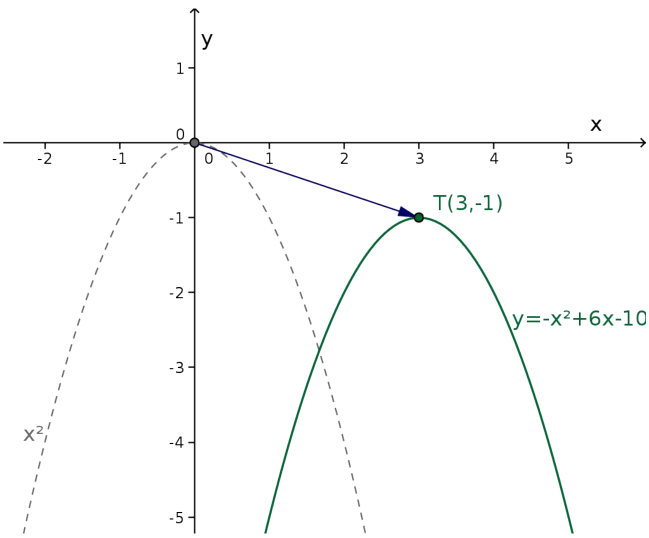
$$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2\cdot(-1)} = 3$$

$$q = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{6^2-4(-1)(-10)}{4(-1)} = -1.$$

Dobimo torej: $T(3; -1)$.

Zapišemo še temensko enačbo parabole, ki je zato: $y = -(x-3)^2 - 1$.

Zaloga vrednosti pa je: $Z_f : (-\infty; -1]$.



Slika 15: Zgled 3

ZGLED 4:

Zapišite enačbo parabole s temenom $T(4; -1)$ in točko na njej $A(8; 7)$. Parabolo tudi narišite, zapišite splošno obliko enačbe parabole in zapišite zalogo vrednosti.

Ker poznamo teme iskane parabole, bomo tokrat uporabili nastavek temenske oblike enačbe zapisa kvadratne funkcije:

$$y = a(x - p)^2 + q.$$

Vanj vstavimo koordinate temena:

$$y = a(x - 4)^2 - 1$$

in nato še koordinate točke A(8,7):

$$7 = a(8 - 4)^2 - 1$$

in izračunamo vodilni koeficient:

$$\begin{aligned} 7 &= 16a - 1 \\ 16a &= 8 \\ a &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

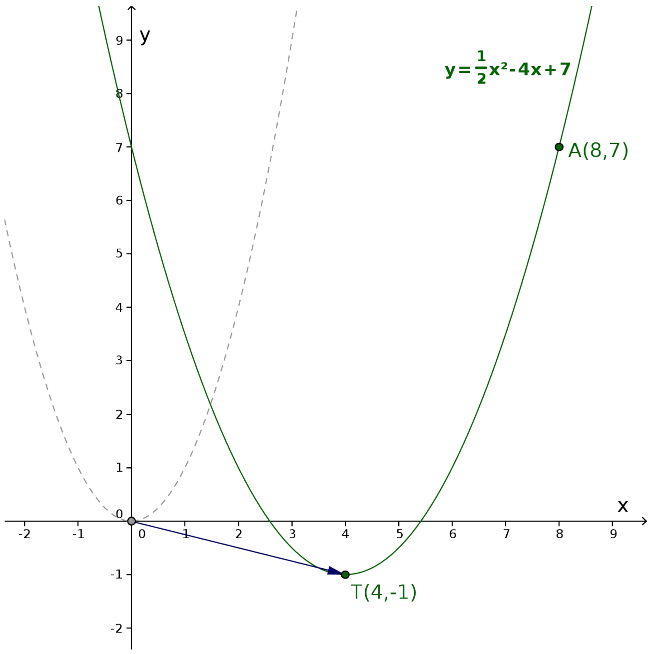
Nato še le zapišemo dobljeno enačbo (v temenski obliki):

$$y = \frac{1}{2}(x - 4)^2 - 1.$$

Pretvorimo jo v splošno:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 7.$$

Zapišemo zalogo vrednosti: $Z_f : [-1; 1\ )$.



Slika 16: Zgled 4

VAJE:

14. V istem koordinatnem sistemu narišite grafe funkcij in za vsako zapišite Z_f .

    a) $f(x) = (x - 1)^2 + 1$

    b) $g(x) = (x - 1)^2 + 3$

    c) $h(x) = (x - 1)^2 - 1$

15. V istem koordinatnem sistemu narišite grafe funkcij.

    a) $f(x) = (x + 2)^2 + 1$

    b) $g(x) = (x + 4)^2 + 1$

    c) $h(x) = (x - 2)^2 + 1$

16. V istem koordinatnem sistemu narišite grafe funkcij in enačbe parabol zapišite v splošni obliki.

    a) $f(x) = -(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{2}$

    b) $g(x) = -2(x - \frac{3}{4})^2 + 1\frac{1}{4}$

    c) $h(x) = \frac{1}{3}(x - 1)^2 - \frac{8}{9}$

17. Narišite funkcijo $f(x) = x^2 - 8x + 19$ in poiščite minimalno vrednost, ki jo funkcijska vrednost lahko zasede. Zapišite tudi zalogo vrednosti.

18. Narišite parabole, poiščite koordinate temen in za vsako zapišite enačbo parabole v temenski obliki.

    a) $y = x^2 - 4x + 2$

    b) $y = x^2 + 4x + 3$

    c) $y = -x^2 - 2x$

    d) $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

    e) $y = -1\frac{1}{4}x^2 - 5\frac{5}{8}x + 6\frac{21}{64}$

    f) $y = \frac{2}{5}x^2 + \frac{16}{5}x + \frac{61}{15}$

19. Parabola ima teme $T(1; 2)$, abcisno os pa seka pri $x = 3$. Zapišite njeno enačbo v splošni obliki.

20. Parabola ima teme na premici $x = -1$ in gre skozi točki $A(1; 1)$ in $B(-4; -4)$. Zapišite njeno enačbo in maksimalno vrednost.

21. Parabolo $y = x^2 - 3$ premaknemo za tri enote desno v smeri abcisne osi. Zapiši enačbo dobljene parabole.

22. Paraboli $y = -\frac{1}{2}x^2$ premaknemo teme v točko $T(1; \frac{3}{2})$. Vse skupaj narišite v koordinatni sistem in zapišite enačbo premaknjene parabole v splošni obliki.

23. Določite enačbo parabole, ki poteka skozi točke.

    a) $A(-3; 2)$, $B(0; 2)$ in $C(1; 6)$

    b) $A(-2; -3)$, $B(3; -8)$ in $C(4; -15)$

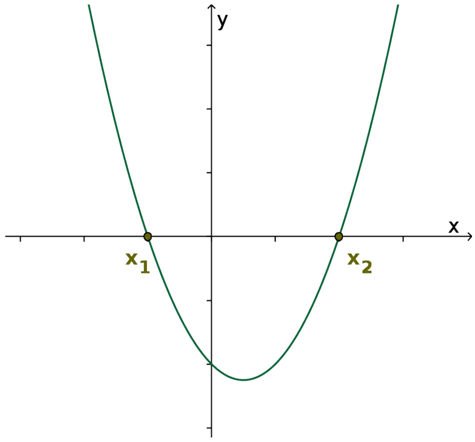
24. Za katero realno število $t \in R$ bo teme parabole $y = tx^2 + 2tx + 3$ ležalo na abcisni osi?

25. Iz enačbe parabole $y = (\frac{1}{2}t + 3)x^2 - (1 - t)x + t$ izrazite ordinato temena. Nato pa še poiščite tisto vrednost parametra $t \in R$, ko je ordinata temena $q = 1$.

26. Poiščite tako število $m \in R$, da bo parabola $y = (m + 5)x^2 - (2 - 3m)x + 3m$

vsebovala točko $A(-2;5)$.

Ničle kvadratne funkcije



Slika 17: Ničli kvadratne funkcije

Za natančnost pri risanju grafov parabol si želimo poiskati presečišči z abcisno osjo. Vemo, da pri določenih premikih le ti obstajata. Najprej zapišimo parabolo $y = ax^2 + bx + c$ v temenski obliki:

$$y = a(x-p)^2 + q.$$

Upoštevajmo še, da je $p = -\frac{b}{2a}$ in $q = -\frac{D}{4a}$, in pogoj za ničle, ki je $y = 0$, potem pa dobljeno enačbo razcepimo:

$$
\begin{aligned}
0 &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}\\
0 &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right)\\
0 &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2\right]\\
0 &= a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\cdot\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\\
0 &= a\left(x-\frac{-b^2+\sqrt{D}}{2a}\right)\cdot\left(x-\frac{-b^2-\sqrt{D}}{2a}\right).
\end{aligned}
$$

Tako smo dobili enačbo parabole razcepljeno v produkt $a(x-x_1)(x-x_2)$, kjer sta x_1 in x_2 ničli. Zapišimo preglednejše:

A Kvadratna funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ ima ničli:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-b^2+\sqrt{D}}{2a}\\
x_2 &= \frac{-b^2-\sqrt{D}}{2a}.
\end{aligned}
$$

Enačbo oblike:

$$y = a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$$

imenujemo **<u>oblika za ničli</u>** parabole, kjer sta x_1 in x_2 ničli in $a \neq 0$.

Pri iskanju ničel, zopet naletimo na diskriminanto $D = b^2 - 4ac$. Oglejmo si sedaj njen pomen.

Diskriminanta in kvadratna enačba

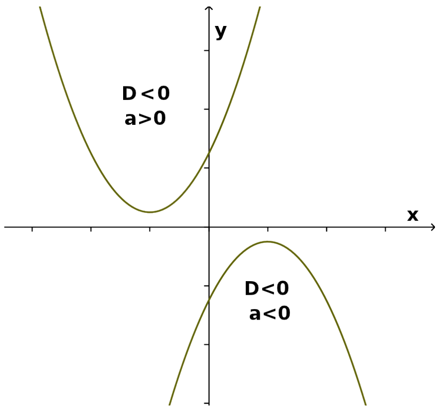
F Nobena parabola iz družine $y = ax^2 + bx + c$, če je diskriminanta $D < 0$, nima ničli $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ v množici realnih števil. Prav tako enačba $0 = ax^2 + bx + c$ v tem primeru nima realnih rešitev.

To lahko vidimo hitro, saj vemo, da koren $\sqrt{-D}$, *nima realnih rešitev (ne obstaja v množici* $\mathbb{R}$*), ampak ima par kompleksnih rešitev* $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$, $x_1 = i\sqrt{D}; x_2 = -i\sqrt{D}$, *kjer je* $i^2 = -1$.

Da v primerih, ko je $D < 0$, parabole nimajo ničel, govori dejstvo, da ko je $a < 0$, je ordinata temena $q = -\frac{D}{4a}$ negativna – takrat parabola ne seka abcisne osi.

Kadar pa je $a > 0$ in $D < 0$, pa je $q > 0$ in prav tako parabola ne seka abcisne osi.

Enostavno lahko sklenemo, da če je diskriminanta negativna, parabola nima ničel.



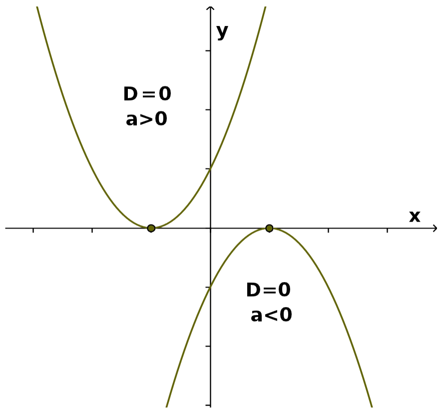
Slika 18:Negativna diskriminanta

F Vsaka parabola iz družine $y = ax^2 + bx + c$, če je diskriminanta $D = 0$, se s temenom dotika abcisne osi in zato ima dve enaki realni ničli: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$. Prav tako ima enačba $0 = ax^2 + bx + c$ v tem primeru dve enaki rešitvi $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

Ločimo dva primera, ko je $D = 0$:

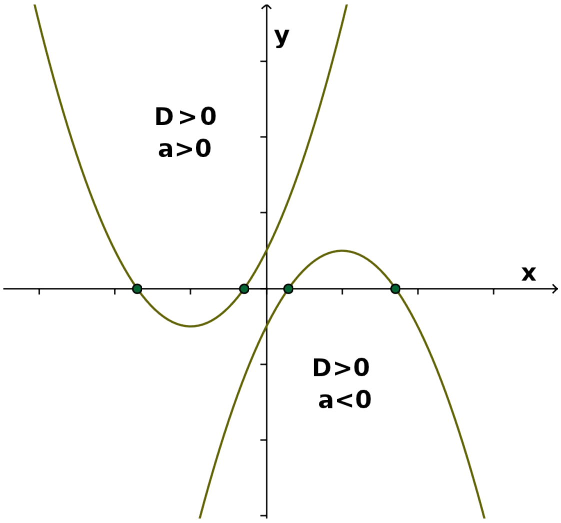
$a < 0$, je ordinata temena $q = -\frac{D}{4a} = 0$. Parabola je konkavna in teme je na abcisni osi pri $p = \frac{-b}{2a}$.

$a > 0$, je ordinata temena $q = -\frac{D}{4a} = 0$. Parabola je konveksna in teme je prav tako na abcisni osi pri $p = \frac{-b}{2a}$.



Slika 19:Diskriminanta D=0

F Vsaka parabola iz družine $y = ax^2 + bx + c$, če je diskriminanta $D > 0$, ima dve različni realni ničli: $x_1; x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Kvadratna enačba $0 = ax^2 + bx + c$ ima takrat dve rešitvi $x_1 \neq x_2$, ki sta ničli parabole.



Slika 20: Diskriminanta D>0

ZGLED 5:

Kvadratni funkciji $f(x) = -x^2 + x + 2$ poiščite teme in njeni ničli ter narišite njen graf.

Ker je $a = -1$, bo parabola konkavna.

Poiščemo teme funkcije:

$T(p; q)$:

$$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(-1)(2) = 9$$

$$q = -\frac{D}{4a} = -\frac{9}{-4} = 2\frac{1}{4}$$

in ničli (pogoj $f(x) = 0$):

$$0 = -x^2 + x + 2,$$

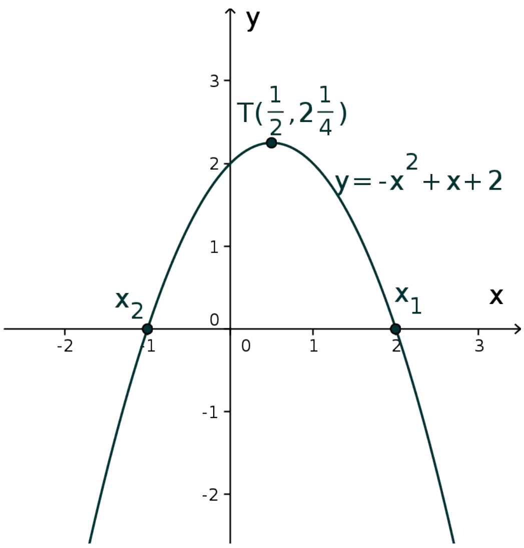
kar znamo rastaviti (tročlenik):

$$0 = -(x - 2)(x + 1)$$

(da bo $a \cdot b = 0$, mora biti ali $a = 0$ ali $b = 0$); ničli sta torej:

$$x_1 = 2; x_2 = -1.$$

Funkcijo še narišemo (Slika 21).



Slika 21: Zgled 5

ZGLED 6:

Kvadratni funkciji $f(x) = 6x^2 - x - 2$ poiščite ničli in teme ter narišite njen graf.

Funkcijski predpis enačimo z nič ($f(x) = 0$):

$$0 = 6x^2 - x - 2$$

in izračunamo diskriminanto:

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(6)(-2) = 49.$$

Izračunamo še $x_1; x_2$:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{1+7}{12} = \frac{2}{3}$$

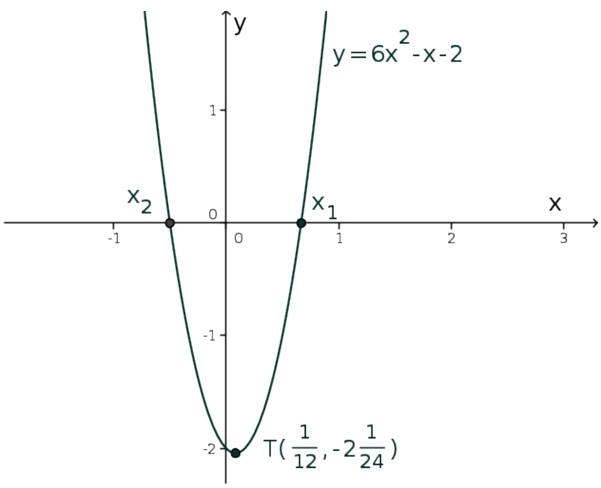
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{1-7}{12} = -\frac{1}{2}.$$

Teme je:

$$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{12} = \frac{1}{12}$$

$$q = -\frac{D}{4a} = -\frac{49}{24} = -2\frac{1}{24}.$$

Torej točka $T(\frac{1}{12}; -2\frac{1}{24})$.



Slika 22: Zgled 6

ZGLED 7:

Rešite enačbo $x^2 - x + 1 = 0$.

Izračunamo diskriminanto:

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3.$$

Ker je diskriminanta negativna, rešitvi kvadratne enačbe nista v množici realnih števil.

A Viètovi formuli:

kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c = 0$ lahko rešimo tudi tako:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

in velja:

$$a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

kjer sta $x_1; x_2$ ničli.

ZGLED 8:

Rešite enačbo $4x^2 - 4x + 1 = 0$.

Izračunamo diskriminanto:

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0.$$

Tokrat je diskriminanta enaka nič, zato bosta rešitvi enaki:

$$x_1; x_2 = -\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = -\frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}.$$

ZGLED 9:

Rešite enačbo $x^2 + \sqrt{2}x - 4 = 0$.

Izračunamo diskriminanto:

$$D = b^2 - 4ac = (\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 18.$$

Rešitvi sta:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{18}}{2 \cdot 1} = \frac{-\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{18}}{2 \cdot 1} = \frac{-\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{2} = \frac{-4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}.$$

ZGLED 10:

Poiščite presečišča parabol $y = x^2 + 2x + 1$ in $y = -x^2 + x + 2$. Narišite tudi obe paraboli in označite presečišča.

Enačbi parabol enačimo:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 &= -x^2 + x + 2 \\ 2x^2 + x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

in rešimo dobljeno kvadratno enačbo:

$$D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9.$$

Rešitvi enačbe sta:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 + 3}{4} = \frac{1}{2},$$

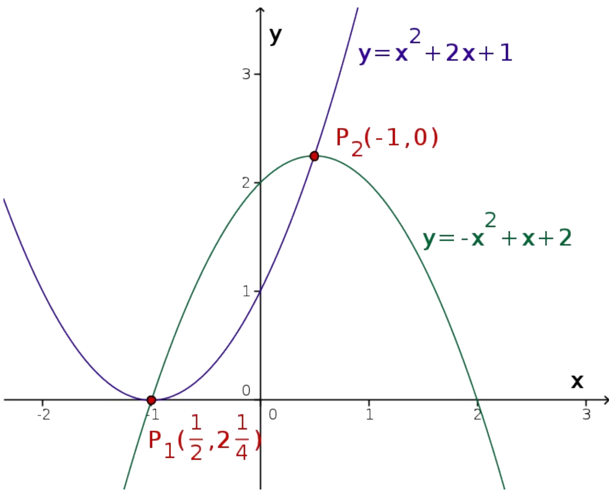
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 - 3}{4} = -1.$$

Presečišči pa sta:

$$P_1(\frac{1}{2}; 2\frac{1}{4}) \text{ in } P_2(-1; 0).$$

Paraboli še narišemo v koordinatni sistem

(Slika 23).



Slika 23: Zgled 10

VAJE:

27. Kvadratni funkciji $f(x) = x^2 - 2x - 3$ poiščite teme in ničli, zapišite zalogo vrednosti in narišite njen graf.

28. Kvadratni funkciji $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$ poiščite teme in ničli, zapišite zalogo vrednosti in narišite njen graf.

29. Kvadratni funkciji $f(x) = 3x^2 - 3$ poiščite teme in ničli, zapišite zalogo vrednosti in narišite njen graf.

30. Kvadratni funkciji $f(x) = -6x^2 - 2x + 4$ poiščite teme in ničli, zapišite zalogo vrednosti in narišite njen graf.

31. Kvadratni funkciji $f(x) = 3x^2 + x$ poiščite teme in ničli, zapišite zalogo vrednosti in narišite njen graf.

32. Narišite parabole.

a) $y = 2x^2 + x - 1$

b) $y = 3x^2 + 2x - 8$

c) $y = -4x^2 + 8x - 5$

d) $y = 2x^2 + 2x - \frac{3}{2}$

e) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$

f) $y = -2x^2 - 4x - 3$

g) $y = x^2 + 3x + 3$

33. Narišite parabole.

a) $y = 2x^2 - 3x + \frac{9}{8}$

b) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}x - 1$

c) $y = 3x^2 + 12x + 12$

d) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{9}$

e) $y = 2(x - 1)2 + 3$

34. Rešite enačbe.

a) $x^2 = x$

b) $0 = 3 - x^2$

c) $x = x^2 - 1$

d) $6x^2 + x - 35 = 0$

e) $4x(x - 1) + x = x - 1$

f) $6(x - 6) = x(x + 18)$

g) $-3x(x - 1) - 5 = 3x - 4$

h) $x - 10 = x(x + 7)$

i) $-3x(x + 2) + x = x(4x + 9) + 2$

35. Poiščite presečišči parabol $y = x^2 - 2x - 3$ in $y = -x^2 + 2x + 4$ ter ju narišite v koordinatni sistem.

36. Poiščite presečišči parabol $y = x^2 + 1$ in $y = -x^2 + 2x - 1$ ter ju narišite v koordinatni sistem.

37. Poiščite presečišči parabol $y = x^2 - 2x - 3$ in $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 1\frac{1}{2}$ ter ju narišite v koordinatni sistem.

38. Poiščite presečišči parabol $y = 2x^2 - 4$ in $y = 2x^2 + 4x + 1$ ter ju narišite v koordinatni sistem.

39. Poiščite presečišči parabol $y = -x^2 + 2x$ in $y = 2x^2 - 4x + 4$ ter ju narišite v koordinatni sistem.

40. Zapiši vse tri oblike enačbe kvadratne

funkcije, ki ima ničli $x_1 = -2$, $x_2 = 4$ in $f(-3) = -23$.

41. Zapiši vse tri oblike enačbe kvadratne funkcije, ki seče abcisno os pri 1 in 3, ordinatno pa pri $y = -12$.

42. Poiščite presečišči premice $y = x + 2$ in parabole $y = x^2$. Oboje tudi narišite v koordinatni sistem.

43. Poiščite presečišči premice $y = x + 5$ in parabole $y = x^2 + 2x - 15$. Oboje tudi narišite v koordinatni sistem.

44. Poiščite presečišči premice $x = \frac{3}{4}$ in parabole $y = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$. Oboje tudi narišite v koordinatni sistem.

45. Poiščite presečišči premice $y = -2$ in parabole $y = -x^2 + 2x + -3$. Oboje tudi narišite v koordinatni sistem.

46. Poiščite presečišči premice $y = 3x - 1$ in parabole $y = x^2 - x + 3$. Oboje tudi narišite v koordinatni sistem.

47. Poiščite presečišči premice $y = 2x + 3$ in parabole $y = -x^2 + 6x - 11$. Oboje tudi narišite v koordinatni sistem.

48. Za katero realno število $t \in \mathbb{R}$ bo $x = 2$ ničla kvadratne funkcije $f(x) = (t - 1)x^2 + (3 - t)x + 2t$?

49. Za katero realno število $t \in \mathbb{R}$ bo teme parabole $y = (t - 2)x^2 - tx + 3$ ležalo na abcisni osi?

50. Za katero realno število $t \in \mathbb{R}$ bo teme parabole $y = tx^2 - 3x + 2tx + t - 1$ ležalo na premici $y = 2$?

51. Za katero realno število $t \in \mathbb{R}$ bo simetrala lihih kvadrantov tangenta na parabolo $y = tx^2 + (2t - 3)x - 2 + t$?

Kvadratna neenačba

Pri kvadratni neenačbi nas zanimajo intervali, na katerih vrednosti kvadratne funkcije ustrezajo danim pogojem.

Če se sprašujemo, kdaj so vrednosti kvadratne funkcije pozitivne, npr: $ax^2 + bx + c > 0$; bodo rešitev intervali, ko je graf funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ nad abcisno osjo.

Torej, če znamo narisati graf kvadratne funkcije in poiskati njeni ničli, bomo rešitev lahko tudi odčitali iz grafa. Za reševanje kvadratne neenačbe pa veljajo že dobro znana pravila reševanja neenačb.

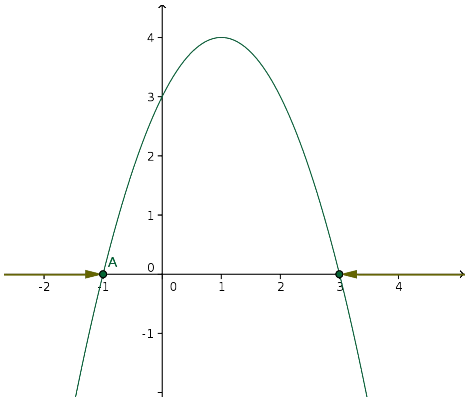
ZGLED 11:

Poiščite rešitve neenačbe: $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$.

Nenačbo razstavimo:

$$-(x^2 - 2x - 3) \leq 0$$

$$-(x - 3)(x + 1) \leq 0.$$



Slika 24: Zgled 11

$x_1 = 3$ in $x_2 = -1$ sta ničli funkcije $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ (ki je konkavna). Ker sta ničli različni, se predznak vrednosti funkcije spremeni, ko gre funkcija skozi ničli. Prav tako nam ničli abcisno os razbijeta na tri intervale: $(-\infty; -1)$, $(-1; 3)$ in $(3; \infty)$. Ker v neenačbi nastopa tudi enakost, bosta ničli vključeni v rešitev. Po skici (Slika 24) vidimo, da je rešitev unija intervalov:

$$R: (-\infty; -1] \cup [3; \infty)$$

VAJE:

52. Rešite neenačbe.

a) $x^2 - x - 6 < 0$

b) $x^2 + 2x > 0$

c) $-x^2 + x - 12 \leq 0$

d) $3x^2 + 5x - 2 \leq 0$

e) $9x^2 - 6x + 4 \geq 0$

f) $x^2 - 2x + 1 < 0$

g) $2x^2 < -1$

53. Za katero realno vrednost parametra $t \in \mathbb{R}$ bodo parabole iz družine

$$y = -x^2 + (m - 1)x + \frac{3}{4}t + \frac{5}{4}$$ ležale nad abcisno osjo?

54. Na katerem območju je graf funkcije

$f(x) = x^2$ ¡ 1 pod premico $y = 2x + 2$?

Uporabnost kvadratne funkcije

ZGLED 12:

Za koliko moramo povečati stranico kvadrata, da bo ploščina dvakrat večja?

Ploščino kvadrata izračunamo po obrazcu $pl = a^2$, kjer a pomeni dolžino stranice kvadrata.

Stranico povečamo za x: $a \Rightarrow a + x$ (Slika 25)

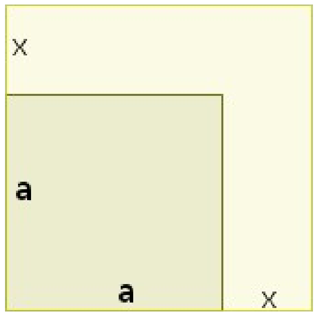
in želimo, da bi bila nova ploščina $pl = 2a^2$.

Dobimo kvadratno enačbo: $2a^2 = (a + x)^2$, ki jo že znamo rešiti:

$$0 = x^2 + 2ax - a^2.$$

Diskriminanta je: $D = b^2 - 4ac = 8a^2$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \\ &= \frac{-2a + \sqrt{8a^2}}{2} \\ &= \frac{-2a + 2\sqrt{2}a}{2} \\ x_1 &= a(-1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$



Slika 25: Zgled 12

Očitno druga rešitev ni pravilna, saj je negativna ($x_2 = a(-1 - \sqrt{2})$).

ODG: Stranico kvadrata moramo povečati za $a(-1 + \sqrt{2})$.

ZGLED 13:

Kateri pravokotnik izmed tistih z enakim obsegom ima največjo ploščino?

Obseg pravokotnika je izračunamo po obrazcu $o = 2a + 2b$, ploščino pa $pl = ab$. Izrazimo eno stranico iz obsega: $a = \frac{o - 2b}{2}$ in jo vstavimo v obrazec za ploščino. Dobimo izraz:

$$\begin{aligned} pl &= \left(\frac{o - 2b}{2}\right) \cdot b \\ &= -b^2 + \frac{o}{2}b \end{aligned}$$

Ploščino imamo sedaj izraženo kot kvadraten izraz v odvisnosti od dolžine stranice b, pri stalnem obsegu o (kv.f). Iščemo abciso temena parabole s koeficienti $a = -1$, $b = \frac{o}{2}$, $c = 0$. ($p = -\frac{b}{2a}$).

$$p = -\frac{\frac{o}{2}}{2(-1)} = \frac{o}{4}$$

To pomeni da mora biti dolžina stranice b četrtina obsega o. To pa je res le pri kvadratu.

ODG: Pravokotnik, ki ima pri nekem obsegu največjo ploščino, je kvadrat.

VAJE (uporaba kvadratne funkcije):

55. Določite števili $a; b \in \mathbb{R}$ tako, da bo njuna vsota 27, produkt pa maksimalen.
56. Število $t \in \mathbb{R}$ zapišite kot vsoto števil $w \in \mathbb{R}$ in $z \in \mathbb{R}$ tako, da bo vsota njunih kvadratov minimalna.
57. Vsota dolžin katet pravokotnega trikotnika je $7\ \mathrm{cm}$. Za katero dolžino katete k_1 bo ploščina takega trikotnika najmanjša?
58. Kateri izmed pravokotnikov z obsegom $14\ \mathrm{cm}$ ima največjo ploščino?
59. Koliko morata biti dolžini diagonal deltoida, da bo imel deltoid največjo ploščino? Vsota dolžin diagonal je $22\ \mathrm{cm}$.
60. Pravokotniku očrtamo krožnico in izmerimo njen polmer $r = 5\ \mathrm{cm}$. Koliko sta dolgi stranici pravokotnika, če je ena $2\ \mathrm{cm}$ daljša od druge?
61. Stranica kvadrata je dolga $10\ \mathrm{cm}$. Za koliko jo morate povečati, da bo ploščina kvadrata štirikrat večja? Kaj pa da bo petkrat?
62. Na farmi, kjer so redili prašiče, so naročili cepivo v vrednosti 1000 €. Medtem ko so čakali dostavo cepiva, so lokalnim kmetom prodali 20 prašičev in ko je cepivo prišlo na farmo, so kljub temu morali od dobavitelja kupiti vse cepivo. Preračunali so, da morajo sedaj plačati 2,5 € več na prašiča, kot pa bi plačali prej. Koliko je bilo ob naročilu cepiva prašičev na farmi?