REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA ŠOLSTVO IN ŠPORT

TŠC Nova Gorica
BIOTEHNIŠKA ŠOLA

Naložba v vašo prihodnost
OPERACIJO DELNO FINANCIRA EVROPSKA UNIJA
Evropski socialni sklad

Linearna funkcija

Mišo Krog

Srednje strokovno izobraževanje: Kmetijski tehnik, tehniki

Modul: MATEMATIKA

Naslov: Linearna funkcija

Gradivo za 1.letnik SSI

Avtor: Mišo Krog

Strokovni recenzent: Janja Barber Rojc, prof. mat.

Lektor: Severin Drekonja, dipl. mat.

Šempeter pri Gorici, 2011

Gradivo je sofinancirano iz sredstev projekta Biotehniška področja, šole za življenje in razvoj (2008-2012).

Operacijo delno financira Evropska unija iz Evropskega socialnega sklada ter Ministrstvo za šolstvo in šport. Operacija se izvaja v okviru operativnega programa razvoja človeških virov za obdobje 2007 – 2013, razvojne prioritete: Razvoj človeških virov in vseživljenjskega učenja, prednostna usmeritev Izboljšanje kakovosti in učinkovitosti sistemov izobraževanja in usposabljanja.

VSEBINA

Kazalo slik

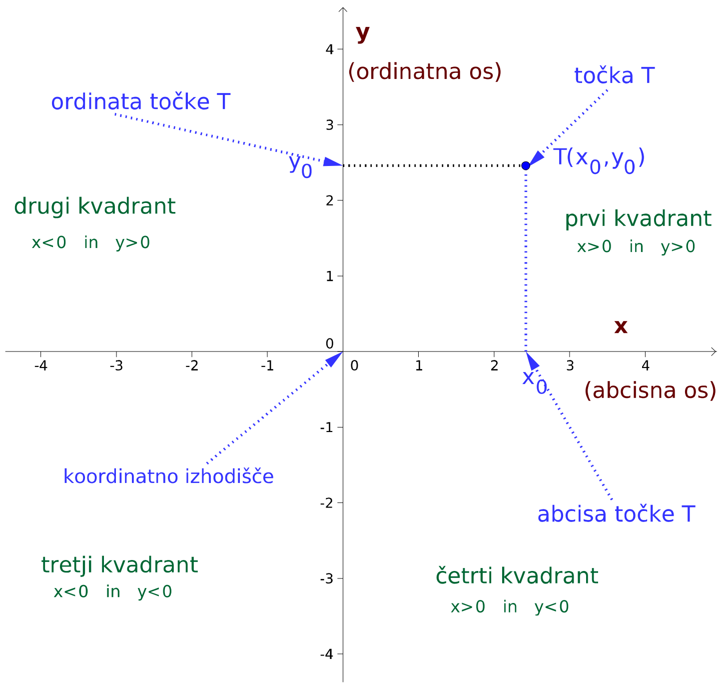
Kartezični koordinatni sistem

Kartezični koordinatni sistem je imenovan po francoskem filozofu in matematiku Rene Descartesu (znanem tudi po izjavi „Mislim, torej sem.“). Ta je opisal pravokotni koordinatni sistem leta 1637 v razpravah Geometrija in Razprava o metodi pravilnega vodenja razuma v iskanju resnice v naravoslovju.

Dve pravokotni realni osi (*premici*) določata pravokotni koordinatni sistem v ravnini. Vodoravno os imenujemo *abcisa*, navpično os pa *ordinata*. Izhodišče O (*koordinatno izhodišče*) predstavlja skupno izhodišče obema osema.

Premici (abcisa in ordinata) razdelita koordinatni sistem na štiri dele, imenovane *kvadranti*.

Urejen par realnih števil (x_0, y_0) predstavlja natanko eno točko koordinatnega sistema. Koordinati točke sta števili x_0 in y_0. Abcisa točke je x_0, ordinata točke pa je y_0. Točko pa zapišemo kot $T(x_0, y_0)$.

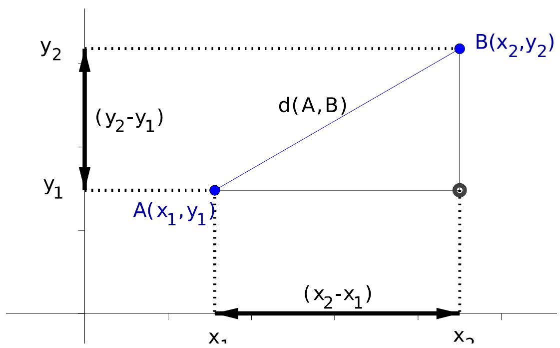


Slika 1: Koordinatni sistem

Razdalja med točkama

Dolžina daljice $|AB|$ oziroma razdalja med točkama $A(x_1, y_1)$ in $B(x_2, y_2)$ je enaka dolžini hipotenuze pravokotnega trikotnika $h = d(A, B)$ s pripadajočima katetama $k_1 = (x_2 - x_1)$ in $k_2 = (y_2 - y_1)$:

$$|AB| = d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Slika 2: Razdalja med točkama

Spomni se:

$h^2 = k_1^2 + k_2^2$ (*Pitagorov izrek*)

$d(A, B)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ (ker je $h = d(A, B)$, $k_1 = (x_2 - x_1)$ in $k_2 = (y_2 - y_1)$)

$$|AB| = d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

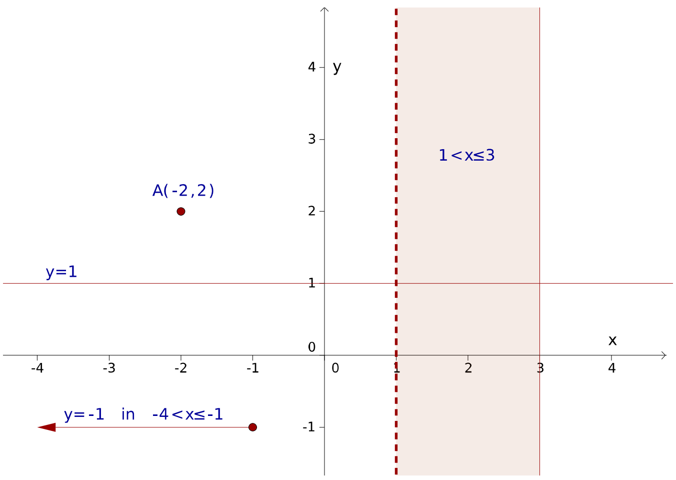
ZGLED:

(Primer 1) V koordinatni sistem nariši:

- točko $A(-2, 2)$;
- množico točk $1 < x \leq 3$;
- premico $y = 1$;
- množico točk: $y = -1$ in $-4 < x \leq -1$.

♠ Razpolovišče daljice:

$$\mathbf{S}\left(\frac{\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{y_1} + \mathbf{y_2}}{\mathbf{2}}\right)$$



Slika 3: Primer 1

Rešitev (Glej sliko levo!):

Predpis $1 < x \leq 3$ *predstavlja navpičen trak, kateri vključuje desni rob (kjer je* $x = 3$*in ne vključuje roba* $x = 1$*).*
$y = 1$ *predstavlja vodoravno premico (vzporednico abcisni osi).*
Množica točk, ko je $y = -1$ *in* x *je večji od* -4 *in manjši ali enak* -1*, pa je daljica, ki ne vključuje točke* $(-4, -1)$.

(Primer 2) Nariši daljico v koordinatni sistem med krajiščema $T_1(-1, -1)$ in $T_2(3, 1)$ in izračunaj njeno dolžino ($d(T_1, T_2)$).

Rešitev (slika desno):

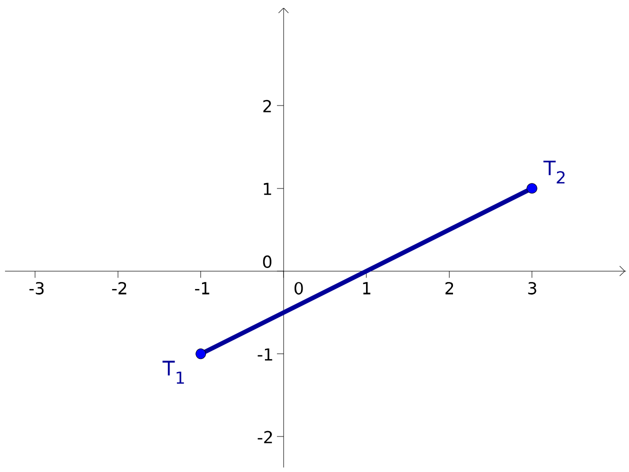
Najprej narišemo točki T_1 *in* T_2*, nato pa še daljico med njima.*

Za izračun dolžine daljice (razdalje) med točkama T_1 *in* T_2 *uporabimo nastavek:*

$$|AB| = d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

vnesemo koordinate točk $T_1(-1, -1)$, $T_2(3, 1)$:

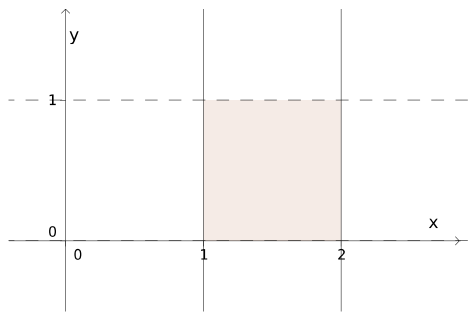
$$|T_1T_2| = d(T_1, T_2) =$$
$$= \sqrt{(3 - (-1))^2 + (1 - (-1))^2} =$$
$$= \sqrt{4^2 + 2^2} =$$
$$= \sqrt{20} =$$
$$= 2\sqrt{5}$$ enot.



Slika 4: Primer 2

VAJE

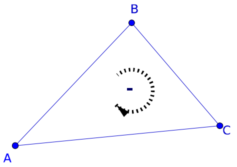
1. *V koordinatni sistem narišite točke* $A(1,3)$, $B(-3,5)$, $C(2,7)$, $E(4,-5)$, $F(-8,3)$ *in* $G(-1,-5)$.
2. *V koordinatni sistem narišite točke:* $H(0{\cdot}4,1)$, $I(-3{\cdot}5,2{\cdot}2)$, $J(2,-4{\cdot}25)$, $K(-\frac{3}{4},-1)$, $L(-\frac{7}{4},\frac{9}{2})$, $M(0,3\frac{1}{3})$.
3. *Narišite v ravnini množice točk:* $x=1$; $x=-4$, $x=-1{\cdot}5$, $x=\frac{5}{2}$, $y=-3$, $y=2$, $y=4{\cdot}75$, $y=-\frac{17}{4}$.
4. *Narišite v ravnini premice skozi.*
   a) $(1,1),(2,2)$
   b) $(-1,0),(2,-3)$
   c) $(-3,0),(0,3)$
5. *Narišite množice vseh točk (vsako množico v svoj koordinatni sistem):* $x<2$, $y>-1$, $x\leq 4$, $y\geq 3$, $x\geq 1$.
6. *Narišite množice vseh točk (x, y) v ravnini, za katere velja.*
   a) $-2<x<3$
   b) $1<x\leq 4$
   c) $-3\leq x\leq 0$
7. *Narišite množice vseh točk (x, y) v ravnini, za katere velja.*
   a) $-1<y<1$
   b) $0<y\leq\frac{5}{2}$
   c) $-3\leq y\leq 1$
8. *Narišite množice vseh točk* (x,y) *v ravnini, za katere velja.*
   a) $(x<3)\wedge(y>1)$
   b) $(x\geq -2)\wedge(y<-1)$
   c) $(x\geq 2)\wedge(y>-0{\cdot}5)$
   d) $(x<1)\wedge(y\leq -1)$
9. *Narišite množice vseh točk* (x,y) *v ravnini, za katere velja.*
   a) $x<0\wedge y>0$
   b) $x>9\wedge y<0$
   Ti dve množici imata svoje ime. Kako ju imenujemo?
10. *Narišite množice vseh točk* (x,y) *v ravnini, za katere velja.*
    a) $(y=1)\wedge(-2<x\leq 3)$
    b) $(x=\frac{1}{2})\wedge(2\leq y\leq 4)$
11. *Izračunajte razdaljo med točkami (daljice tudi nariši) in zapiši koordinate središča daljice.*
    a) $A(1,1)$, $B(4,5)$
    b) $C(0,0)$, $D(6,8)$
    c) $E(-3,-6)$, $F(2,6)$
12. *Natančno izračunajte razdaljo med točkami (daljice tudi nariši) in zapiši koordinate središča daljice.*
    a) $A(0,0)$, $B(1,1)$
    b) $C(2,2)$, $D(4,3)$
    c) $E(-4,-3)$, $F(0,-1)$
13. *Dani sta točki* $T_1(-3,-2)$ *in* $T_2(x_2,-3)$. *Določite neznano koordinato tako ,da bo razdalja med točkama* $d(T_1,T_2)=\sqrt{2}$.
14. *Izračunajte razdaljo med točkama* $A(\sqrt{2},\sqrt{3})$ *in* $B(-\sqrt{3},\sqrt{2})$.
15. *Narisana je množica v koordinatnem sistemu. Zapišite predpis!*



Ploščina trikotnika (v koordinatnem sistemu)

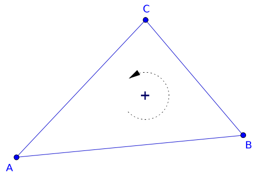
Tri različne <u>nekolinearne</u> točke v ravnini $T_1(x_1,y_1)$, $T_2(x_2,y_2)$ in $T_3(x_3,y_3)$ določajo natanko en trikotnik. Ploščina le tega je:

$$\boxed{S=\frac{1}{2}\cdot o\cdot((x_2-x_1)\cdot(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))}.$$



Slika 5: Negativna orientacija

Če si oglišča trikotnika ABC sledijo v smeri urinega kazalca, pravimo, da ima trikotnik <u>negativno orientacijo</u> oziroma je <u>negativno orientiran</u>. Če je negativno orientiran, potem v formuli za izračun ploščine upoštevamo, da je $o=-1$.



Slika 6: Pozitivna orientacija

Če pa si oglišča trikotnika ABC sledijo v nasprotni smeri urinega kazalca, pravimo, da ima trikotnik <u>pozitivno orientacijo</u> oziroma je <u>pozitivno orientiran</u>. Če drži, da je pozitivno orientiran, potem pa v formuli za izračun ploščine upoštevamo, da je $o=1$.

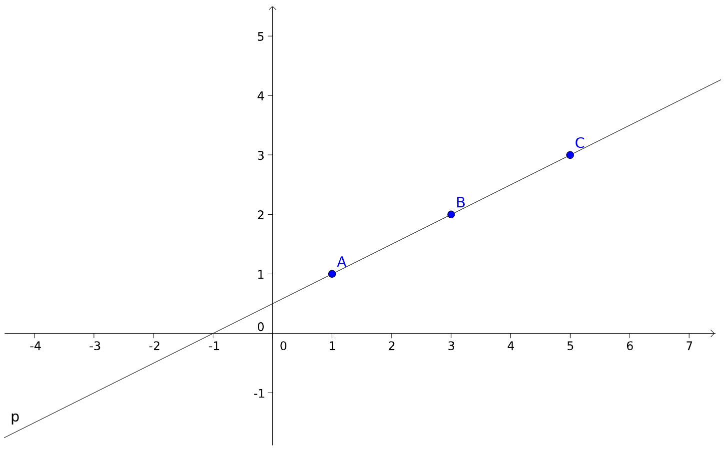
<u>ZGLED:</u>

<u>(Primer 1)</u> Za katero vrednost x ležijo točke $A(1,1)$, $B(x,2)$ in $C(5,3)$ na isti premici?

Rešitev:

Če bodo tri točke ležale na isti premici (kolinearne), bo ploščina trikotnika, ki ga določajo enaka nič.

Zato velja:



Slika 7: Primer 1

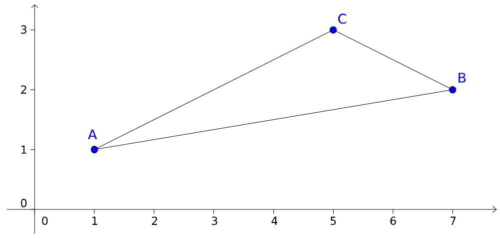
$$S=\frac{1}{2}\cdot o\cdot((x_2-x_1)\cdot(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))=0.$$

Vstavimo koordinate točk $A(1,1)$, $B(x,2)$ in $C(5,3)$ v enačbo:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}((x-1)\cdot(3-1)-(5-1)(2-1))=\\
&= \frac{1}{2}((x-1)\cdot 2-4\cdot 1)=\\
&= (x-1)-2\\
x &= 3.
\end{aligned}$$

(Primer 2) Kolikšno ploščino določa trikotnik ABC, če je $x = 7$ (točke $A(1,1)$, $B(x,2)$ in $C(5,3)$)?

Drugi del naloge se rešuje na podoben način, le da so vse koordinate znane in računamo:



Slika 8: Primer 2

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \cdot o \cdot ((x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot o \cdot ((7-1) \cdot (3-1) - (5-1)(2-1)) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (6 \cdot 2 - 4 \cdot 1) = \\
&= \frac{1}{2}(8) = \\
&= 4.
\end{aligned}
$$

O determinanti:

Za $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ izraz zapisan kot:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

imenujemo ***determinanta***.

Absolutna vrednost determinante predstavlja ploščino paralelograma, njena polovica pa torej ploščino trikotnika:

$$D = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} =$$
$$(x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

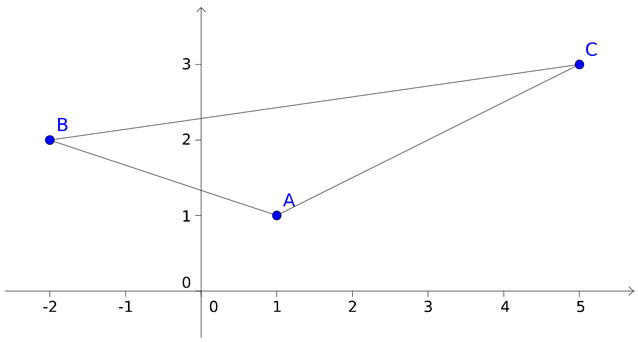
Kadar je determinanta $D > 0$, je trikotnik pozitivno orientiran.

Če je $D < 0$, je pa negativno orientiran.

Ko se zgodi, da so točke A, B in C na isti premici, pa je determinanta $D = 0$.

(Primer 3) Kakšna je orientacija trikotnika, ko je $x = -2$ (točke $A(1,1)$, $B(x,2)$ in $C(5,3)$)?

Orientacijo trikotnika, ko je x=2, lahko enostavno ugotovimo iz slike. Uredimo točke A(1,1), B(-2,2) in C(5,3) in narišemo trikotnik (Slika 9). Spodnji dodatek (levo) o determinanti nam pomaga takšne naloge rešiti precej bolj elegantnejše.



Slika 9: Primer 3

Točke: A(1,1), B(-2,2) in C(5,3) vstavimo v nastavek za determinanto:

$$D = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2-1 & 2-1 \\ 5-1 & 3-1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} =$$

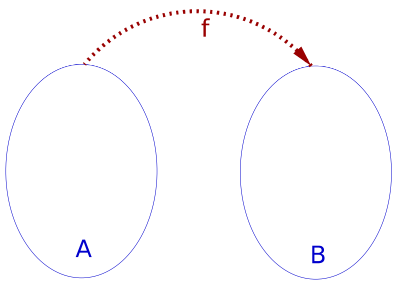
$$= -6 - 4 = -10.$$

Ugotovimo, da je determinanta negativna, kar pomeni da je trikotnik negativno orientiran.

VAJE

16. *Izračunajte obseg trikotnika z oglišči* $A(1,1)$, $B(4,3)$, $C(4,5)$.
17. *Izračunajte obseg trikotnika z oglišči* $A(-6,-4)$, $B(-6,1)$, $C(6,-4)$.
18. *Izračunajte obseg trikotnika z oglišči* $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(1,-1)$.
19. *Kateri trikotniki iz 17., 18. in 19. naloge so enakokraki?*
20. *Izračunajte ploščino in orientacijo trikotnika z oglišči* $A(0,0)$, $B(0,1)$ *in* $C(1,1)$.
21. *Izračunajte ploščino in orientacijo trikotnika z oglišči* $A(0,-2)$, $B(0,2)$ *in* $C(0,1)$.
22. *Izračunajte ploščino in orientacijo trikotnika z oglišči* $A(1,1)$, $B(4,3)$ *in* $C(4,5)$.
23. *Izračunajte ploščino in orientacijo trikotnika z oglišči* $A(-6,-4)$, $B(-6,1)$ *in* $C(6,-4)$.
24. *Trikotniku z oglišči* $A(3,2)$, $B(5,2)$ *in* $C(5,4)$ *premaknemo oglišči B in C tako, da sta novi oglišči sedaj* $B'(4,2)$ *in* $C'(4,3)$. *Koliko odstotkov prvotnega trikotnika* ABC *predstavlja ploščina trikotnika* $AB'C'$*?*
25. *Oglišča štirikotnika* $ABCD$ *so* $A(0,0)$, $B(4,1)$, $C(6,4)$ *in* $D(2,3)$. *Narišite štirikotnik in izračunajte ploščino. Poimenujte štirikotnik.*
26. *Štirikotniku iz naloge 26 izračunajte obseg in dolžini diagonal.*
27. *Štirikotnikova oglišča so:* $A(-2,-1)$, $B(3,-1)$, $C(5,3)$ *in* $D(0,3)$. *Izračunajte ploščino, obseg ter dolžini diagonal* AC *in* BD.
28. *Trikotnik ima oglišča* $A(-1,1)$, $B(3,y)$ *in* $C(4,1)$. *Veste tudi to, da je njegova ploščina* $7\frac{1}{2}$. *Določite ordinato točke* B.
29. *Oglišče* A *trikotnika* ABC *leži v koordinatnem izhodišču, oglišče B pa leži na abcisni osi. Izračunajte abciso oglišča* B, *če veste da je* $C(3,-1)$, *ploščina pa je* 4 *(ne pozabite na orientacijo).*
30. *Za kateri* $x \in \mathbb{R}$ *bodo točke* $A(-1,1)$, $B(2,x)$ *in* $C(8,2)$ *ležale na isti premici?*
31. *Določite* y *tako, da bodo naslednje točke kolinearne:* $A(-2,0)$, $B(0,-2)$ *in* $C(5,y)$.
32. *Kakšen mora biti* y*, da ne bodo točke ležale na isti premici, če veste da je* $A(-2,-3)$, $C(\frac{5}{2},\frac{1}{2})$ *in je točka* B *na ordinatni osi.*

Funkcija



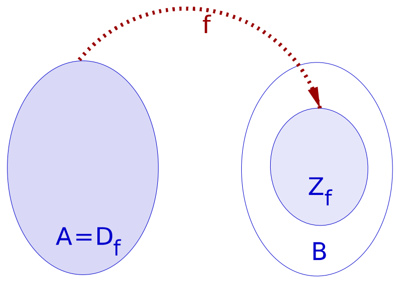
Slika 10: Funkcija

Predpis, ki vsakemu elementu iz neke množice $\mathbf{A}$ priredi natanko eno sliko v neki množici $\mathbf{B}$, imenujemo **funkcija**. Povedano na kratko zapišemo takole:

$\mathbf{f} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}.$

Pravimo: „f je funkcija, ki slika elemente iz množice $\mathbf{A}$ v množico $\mathbf{B}$“. Elementi v množici $\mathbf{A}$ so predstavniki **neodvisne spremenljivke**. Elementi v množici $\mathbf{B}$, pa so predstavniki **odvisne spremenljivke**, saj je njihova vrednost odvisna od izbire elementa v množici $\mathbf{A}$ in samega predpisa.

Množico $\mathbf{A}$ imenujemo **definicijsko območje** in označimo: $\mathcal{D}_{\mathbf{f}}$. To je množica, v kateri se nahajajo vsi **originali**. Množica slik je pa podmnožica množice $\mathbf{B}$ (včasih je kar cela množica) in jo imenujemo zaloga vrednosti ter označimo: $\mathcal{Z}_{\mathbf{f}}$.



Slika 11: Lastnosti funkcij

V veliki večini bomo imeli opravka s sledečim načinom zapisa, ko neodvisno spremenljivko (kot je to navada v matematiki) označimo z x, odvisno spremeljivko pa z y. Funkcijo pa na splošno označimo:

$$\boxed{\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}}$$

in to preberemo: „funkcijska vrednost $\mathbf{x}$-a je $\mathbf{y}$“. (f pomeni predpis, preslikava, funkcija, $f(x)$ pa funkcijska vrednost neodvisne spremenljivke $\mathbf{x}$.)

Funkcije, v katerih so rezultati realna števila, imenujemo **realne funkcije** ($\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$).

Za predstavitve funkcij lahko uporabljamo različne načine. Uporabljali bomo predvsem enačbo (funkcijski predpis), tabelo in graf.

- enačba

  Npr: $f : x \mapsto 2x$ ali pa $f(x) = 2x$ oz. $y = 2x$.

  Tak predpis bi pomenil, da x-u priredimo dvojno vrednost ($2x$). V tem primeru bi bilo definicijsko območje množica vseh x, zaloga vrednosti pa vse podvojene vrednosti.

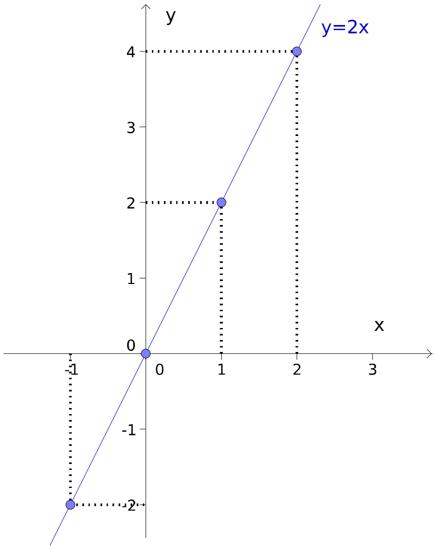
- tabela

  Manj natančna je predstavitev s tabelo. V tabelo tedaj v prvi stolpec vpisujemo elemente odvisne spremenljivke $x \in \mathcal{D}_{\mathbf{f}}$, v drugi stolpec pa njihove funkcijske vrednosti.

- graf

Splošno je graf funkcije množica točk (urejenih parov (x, y), kjer je x odvisna spremenljivka, y pa neodvisna spremenljivka).

Zgornji tabeli in še prej podani enačbi funkcije $y = 2x$ pripada graf funkcije, ki je množica točk (urejenih parov (x, y)) v koordinatnem sistemu (slika desno). Iz zgornje tabele lahko preberemo koordinate točk. Vsaki izračunani vrednosti pripada točka $T(x, y)$, ki leži na grafu. Abcisa vsake točke je vrednost x (levi stolpec tabele), ordinata pa je y (oz. $f(x)$), ki pa se nahaja v desnem stolpcu tabele.



Slika 12: Graf funkcije

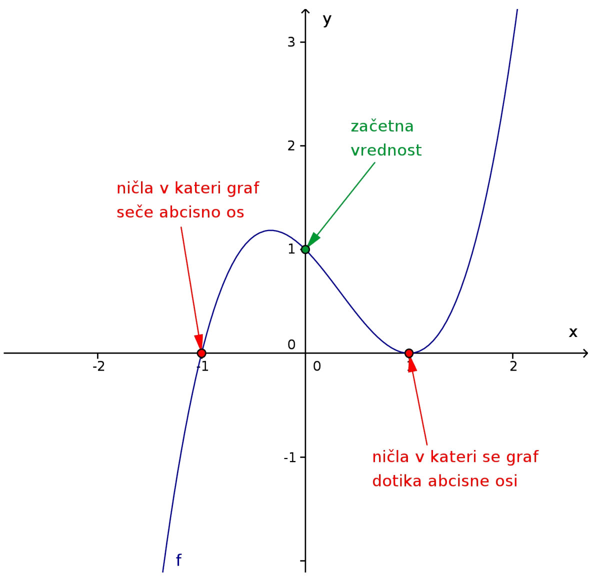
Lahko si predstavljamo, da je definicijsko območje množica vrednosti, ki jo odčitamo za abciso točk, ki ležijo na grafu – vrednosti, za katere je naš predpis „smiselen“, zaloga vrednosti pa je množica vrednosti, ki jih lahko izračunamo za ordinato točk, ki pripadajo grafu – vrednosti, za katere še dobimo „smiselen“ rezultat.

x	$y = 2x$
-1	-2
0	0
1	2
2	4

Ničla in začetna vrednost funkcije

Števila pri katerih je funkcijska vrednost enaka 0, imenujemo **ničle funkcije**. Grafično to pomeni, da graf funkcije takrat ali seka abcisno os ali pa se je samo dotika (točke $M(x_0, 0)$ ležijo na abcisni osi). Da ta števila poiščemo, je enostavno potrebno rešiti enačbo:

$$\mathbf{f(x) = 0}.$$



Slika 13: ničle in začetna vrednost

V nasprotju z ničlami, ki jih ima funkcija lahko več (ali pa nobene), pa je začetna vrednost lahko ena sama – če sploh obstaja.

Začetna vrednost je taka vrednost, pri kateri je neodvisna spremenljivka enaka 0. Grafično je to tista vrednost, pri kateri graf seka ordinatno os (takrat je $x = 0$, točka $N(0, f(0))$). Izračunamo jo tako, da za x izberemo 0: $f(0) = y_0$.

ZGLED

Funkciji $f(x) = 2x$ poiščite ničlo in začetno vrednost.

Rešitev:

VAJE

33. *Dopolnite tabelo, če veste da je* $f(x) = x - 1$.

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

34. *Dopolnite tabelo, če veste da je* $f(x) = -2x + 3$.

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

35. *Dopolnite tabelo, če veste da je* $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$.

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

36. *Dopolnite tabelo, če veste da je* $f(x) = x^2 - 1\frac{1}{2}$.

x	$f(x)$
-2	
$-1\frac{1}{2}$	
-1	
$-\frac{1}{2}$	
0	

37. *S pomočjo tabeliranja narišite graf funkcije* $f(x) = 2x - 3$.
38. *S pomočjo tabeliranja narišite graf funkcije f* $(x) = -3x + 2$.
39. *S pomočjo tabeliranja narišite graf funkcije* $f(x) = \frac{x}{3} - 1$.
40. *S pomočjo tabeliranja narišite graf funkcije*

Začetna vrednost: $f(0) = 2 \cdot 0 = 0$

Ničla:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 2x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$f(x) = -x$.

41. *Zapišite definicijsko območje, zalogo vrednosti ter izračunajte ničlo in začetno vrednost funkcije:* $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$.
42. *Zapišite definicijsko območje, zalogo vrednosti ter izračunajte ničlo in začetno vrednost funkcije:* $f(x) = -\frac{x}{4} - \frac{2}{5}$.
43. *Zapišite definicijsko območje, zalogo vrednosti ter izračunajte ničlo in začetno vrednost funkcije: f*$(x) = 1$.
44. *Zapišite definicijsko območje, zalogo vrednosti ter izračunajte ničlo in začetno vrednost funkcije:* $f(x) = \frac{2}{x} + 2$.
45. *Zapišite definicijsko območje, zalogo vrednosti ter izračunajte ničlo in začetno vrednost funkcije:* $f(x) = x^2$.
46. *Funkcija* f *vsakemu dvakratniku realnega števila odšteje* $0{\dot{}}5$.
a) Zapišite njen predpis.
b) Poiščite njeno ničlo in začetno vrednost.
c) S korakom 1 *tabelirajte funkcijo na območju* $-3 \leq x \leq 3$.
47. *Z avtomobilom se peljemo v Ljubljano s stalno hitrostjo* $80\ km/h$.
a) Zapišite hitrost kot funkcijo odvisno od časa.
b) Čez koliko časa bomo prišli v Ljubljano, če je do tja $140\ km$*?*
c) Koliko metrov naredimo v 18 *sekundah?*

Linearna funkcija

Realno funkcijo oblike:

$$\boxed{\mathbf{f(x) = k \cdot x + n},}$$

kjer sta k in n realni števili ($k, n \in \mathbb{R}$) in $k \neq 0$, imenujemo **linearna funkcija**. Iz zapisa $y = kx + n$ vidimo, da je spremenljivka y linearno odvisna od spremenljivke x.

Linearna funkcija slika vrednosti iz množice realnih števil v množico realnih števil: $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. $(x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \mathbb{R})$, kar seveda pomeni, da je definicijsko območje množica vseh realnih števil $(\mathcal{D}_f = \mathbb{R})$ in prav tako je zaloga vrednosti ($\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}$).

ZGLED:

Po telefonu naročimo pico, ki stane $6\dot{}5$ €. V restavraciji nam povedo, da stane dostava $1\dot{}5$ €. Razmišljamo, da bi naslednji teden na obisk povabili prijatelje in naročili več pic. Zapišite odvisnost količin in izračunajte koliko stane, če naročimo 11 pic.

Rešitev:
Z x označimo število pic, s $c(x)$ pa bomo označevali ceno pic in dostave. Vsaka pica stane $6\dot{}5$ €, dostava pa znese $1\dot{}5$ €, zato je:

$$c(x) = 6\dot{}5 \cdot x + 1\dot{}5;$$

iz te zveze enostavno izračunamo, koliko bi stalo 11 pic:

$$\begin{aligned} c(x) &= 6\dot{}5 \cdot x + 1\dot{}5 \\ c(11) &= 6\dot{}5 \cdot 11 + 1\dot{}5 \\ c(11) &= 71\dot{}5 + 1\dot{}5 \\ c(11) &= 73. \end{aligned}$$

ODG: 11 pic skupaj z dostavo stane 73 €.
Jasno je, da v tem primeru za vrednosti neodvisne spremenljivke x izbiramo med naravnimi števili (kako bi naročili -3 pice?), prav tako je vrednost odvisne spremenljivke naravno število.

VAJE

48. *V silosu je $4\ m^3$ žita, vsega skupaj pa lahko sprejme $45\ m^3$ žita. Ob polnjenju doteka v silos $2\ m^3$ žita v 30 sekundah. Zapišite, koliko je žita v določenem času v silosu kot linearno odvisnost. Koliko časa je potrebno, da je silos poln?*
49. *Funkcija f prišteje številu 10 kvadrat nekega števila. Zapišite funkcijski predpis in izračunajte $f(-2\dot{}5)$.*
50. *Iz polnega bazena $(2\ m \times 3\ m \times 1\dot{}5\ m)$ voda odteka enakomerno in sicer $5\ l$ na sekundo. Zapišite količino iztečene vode kot funkcijo časa t. Ob kakšnem času bo v bazenu še $15\ l$ vode?*
51. *Za $f(x) = -\frac{3}{4}x + 1$ izračunajte*

    $2 - 3f(4) + f(-\frac{8}{6}) =.$

Risanje grafa linearne funkcije

Vsaki linearni funkciji $f(x) = k \cdot x + n$ pripada premica z enačbo $\mathbf{y = k \cdot x + n}$, kjer sta $\mathbf{k \wedge n} \in \mathbb{R}$.

Namig za dokaz: Izberite si poljubne tri točke iz premice in izračunajte ploščino pripadajočega trikotnika.

Smerni koeficient

Prva konstanta, ki nastopa v linearni funkciji, je $\mathbf{k}$ **- smerni koeficient**. Smerni koeficient je količnik med spremembo odvisne spremenljivke glede na spremembo neodvisne spremenljivke:

$$\mathbf{k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}.$$

Po domače: smerni koeficient nam pove, kolikšna sprememba po odvisni spremenljivki se je zgodila na eno enoto spremembe po neodvisni spremenljivki.

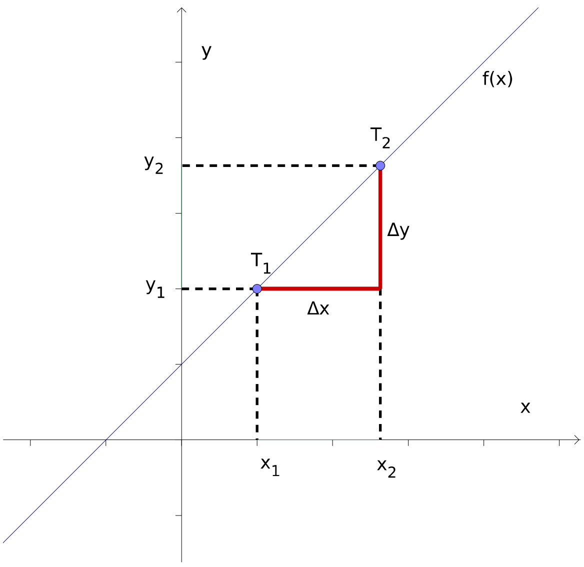
Smerni koeficient lahko izpeljemo na sledeči način:

Recimo da imamo dve točki: $\mathbf{T_1, T_2}$, določeni s funkcijo:

$$\begin{aligned} T_1(x_1, y_1): \quad & f(x_1) = y_1 \\ T_2(x_2, y_2): \quad & f(x_2) = y_2; \end{aligned}$$

funkcijski vrednosti odštejemo in z malo „telovadbe“ dobimo:

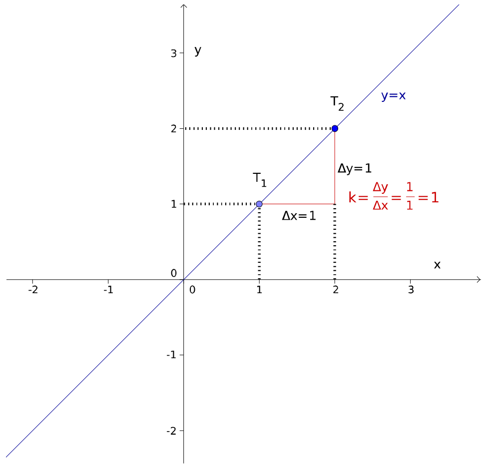
$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= y_2 - y_1 \\ kx_2 + n - (kx_1 + n) &= y_2 - y_1 \\ k(x_2 - x_1) &= y_2 - y_1 \\ k &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \end{aligned}$$



Slika 14: Smerni koeficient

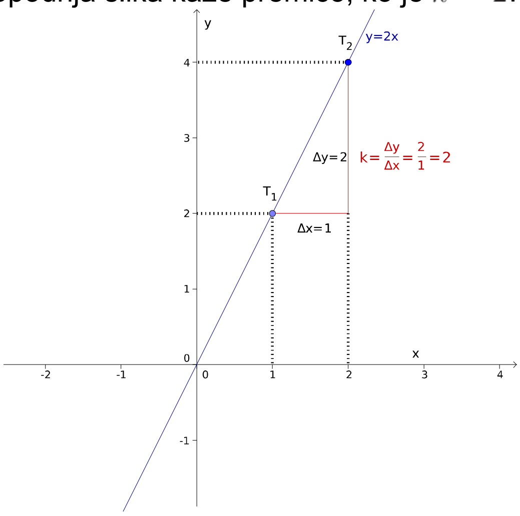
Grafi na naslednji strani nam še malo prikažejo pomen smernega koeficienta.

Spodnja slika kaže premico, ko je $k = 1$.



Slika 15: k=1

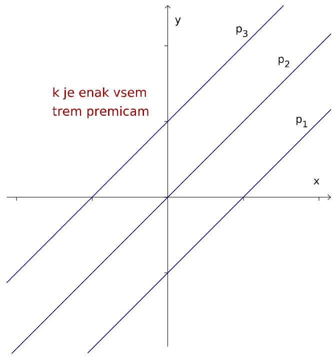
Spodnja slika kaže premico, ko je $k = 2$.



Slika 18: k=2

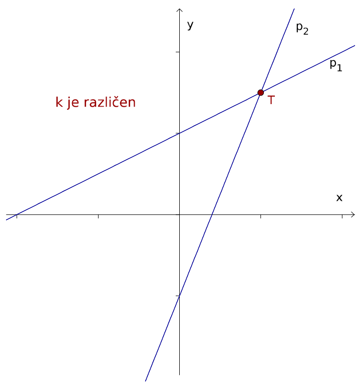
Spodnja slika kaže premico, ko je $k = -1$.

Opazimo, da so premice z **enakim smernim koeficientom vzporedne** (za vsako enoto bodo enako narasle).



Slika 16: Vzporednice

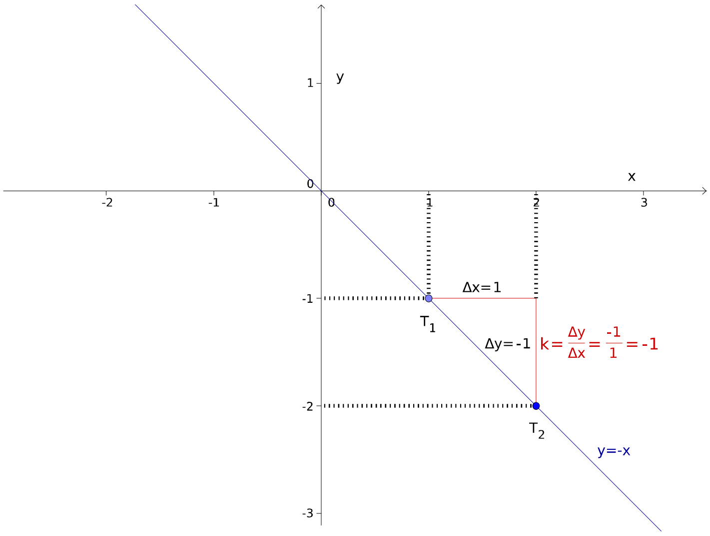
Premice, ki imajo **različen smerni koeficient,** bodo imele presečišče (skupno točko).



Slika 17: Sečnice

Povejmo še, da so tiste premice, ki imajo smerni koeficient pozitiven$(\mathbf{k} > \mathbf{0})$, **naraščajoče**.

Tiste z negativnim smernim koeficientom $(\mathbf{k} < \mathbf{0})$ pa so **padajoče** (*glej slike levo*).



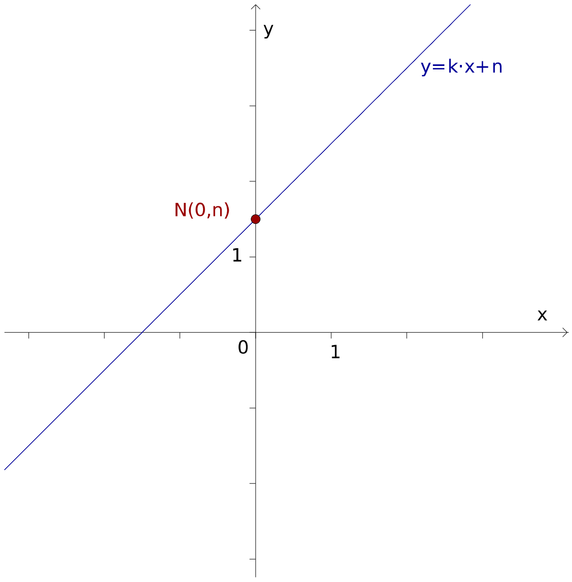
Slika 19: k=3

Začetna vrednost

O začetni vrednosti smo že govorili na strani 11 (splošno o funkcijah). Lepa stvar linearne funkcije je ta, da je v enačbi premice $\mathbf{y = k \cdot x + n}$ konstanta $\mathbf{n}$ začetna vrednost, saj ko je $x = 0$ dobimo:

$$\begin{aligned} y &= k \cdot 0 + n \\ y &= n. \end{aligned}$$

Posledično je naša začetna vrednost torej točka $\mathbf{N(0, n)}$, torej točka, ko premica seče ordinatno os, ima abciso enako 0, ordinato pa enako n.



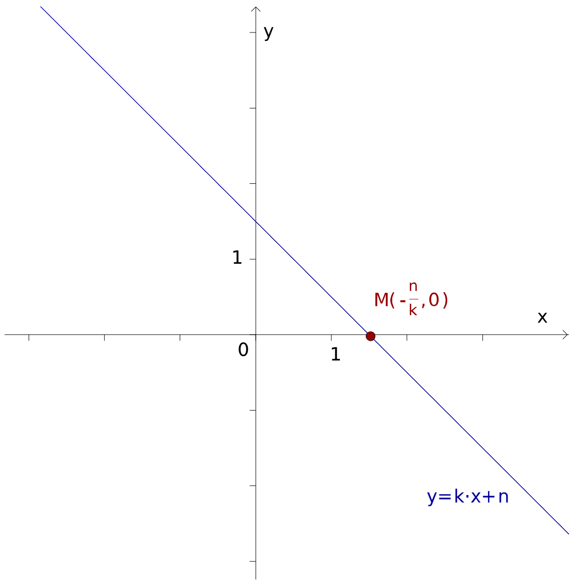
Slika 20: Začetna vrednost

Ničla linearne funkcije

Prav tako je že nekaj zapisanega o ničli funkcije na strani 11. Lastnost linearne funkcije je, da ima eno ničlo ($k \neq 0$).

Iz splošnega predpisa linearne funkcije $\mathbf{f(x) = k \cdot x + n}$ in pogoja ničel $\mathbf{f(x) = 0}$ - funkcijska vrednost je enaka 0 - lahko izrazimo ničlo kot točko $\mathbf{M(x_0, 0)}$ na sledeči način:

$$\begin{aligned} f(x) &= kx_0 + n \\ 0 &= kx_0 + n \\ -kx_0 &= n \\ x_0 &= -\frac{n}{k}. \end{aligned}$$

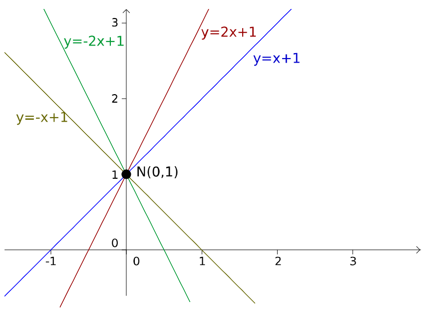


Slika 21: Ničla funkcije

Ničla je točka $\mathbf{M(-\frac{n}{k}, 0)}$. Torej točka, kjer seka premica abcisno os, abcisa je takrat $x_0 = -\frac{n}{k}$.

Premice z enako začetno vrednostjo n sekajo ordinatno os v isti točki.

Slika desno kaže, kako različne premice z enako začetno vrednostjo $n = 1$ sekajo ordinato v točki $N(0, 1)$.



Slika 22: Pomen začetne vrednosti

Poskusite narisati sami v enak koordinatni sistem funkcije:

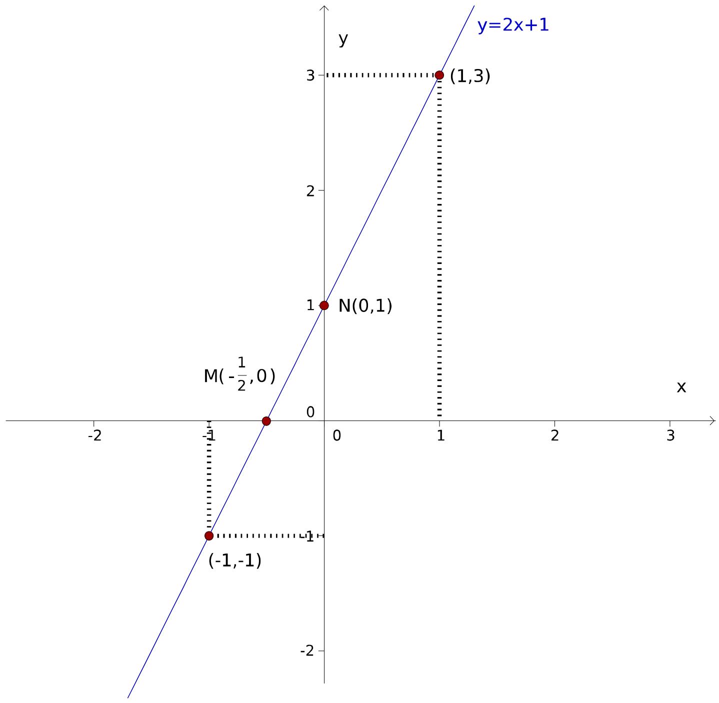
$$f(x) = x + 1$$
$$g(x) = -x + 1$$
$$h(x) = 2x + 1$$
$$j(x) = -2x + 1$$

ZGLED:

Narišite premico $y = 2x - 1$, zapišite koordinate ničle in začetne vrednosti. Zapišite tudi enačbo premice vzporednice skozi točko $T(1, -1)$ in jo narišite v isti koordinatni sistem.

Rešitev:
Premico $y = 2x + 1$ lahko narišemo na več načinov. V tem primeru bomo tabelirali za $x = \{-1, 0, 1\}$, in narisali točke v koordinatni sistem.

x	y
-1	-1
0	1
1	3



Slika 23: Premica

Če pravilno izračunamo ničlo $M(x_0, 0)$ in začetno vrednost $N(0, y_0)$, ju lahko vrišemo v KS in skozi potegnemo premico:
<u>-ničla</u> $(\mathbf{y = 0})$:

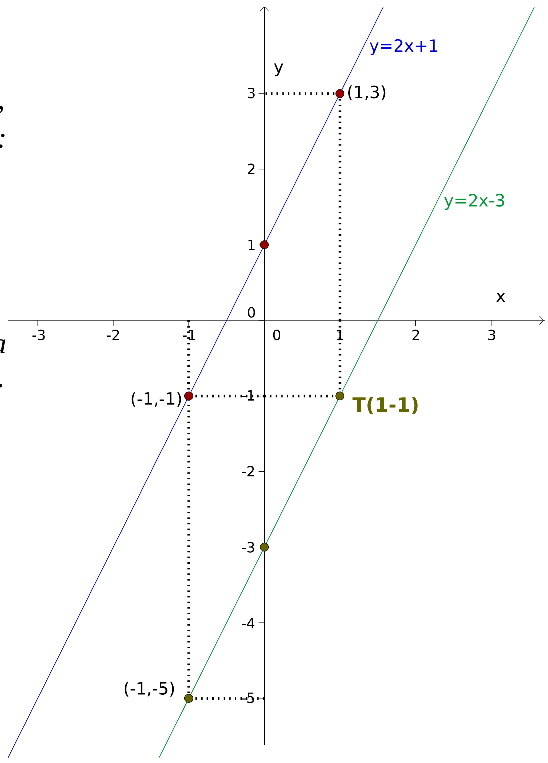
$$\begin{aligned} 0 &= 2x + 1 \\ -2x &= 1 \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$M(-\frac{1}{2}, 0)$

<u>-začetna vrednost</u> $(\mathbf{x = 0})$:
Lahko jo bodisi odčitamo iz enačbe $y = 2x + 1$: $n = 1$, pomeni, da imamo točko $N(0, 1)$, ali pa jo izračunamo: $y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$
V obeh primerih je $N(0, 1)$.

<u>-vzporednica skozi</u> $T(1, -1)$:

Vemo, da ima vzporednica enak smerni koeficient kot premica $y = 2x + 1$. Torej $k = 2$. Vemo tudi, da gre skozi točko T. Znano vstavimo v nastavek:



Slika 24: Vzporednici

$$
\begin{aligned}
y &= kx + n \\
y &= 2x + n \quad (k = 2) \\
-1 &= 2 \cdot (1) + n \quad T(1, -1) \\
n &= -3 \\
y &= 2x - 3.
\end{aligned}
$$

Ponovimo zgornji postopek in vrišemo v KS (slika desno).

VAJE

52. *V isti koordinatni sistem narišite grafe funkcij.*
    a) $f(x) = x$
    b) $f(x) = x - 2$
    c) $f(x) = x + 2$
    Kaj opazite?
53. *V isti koordinatni sistem narišite grafe funkcij.*
    a) $f(x) = x - 1$
    b) $f(x) = 2x - 1$
    c) $f(x) = -2x - 1$
    Kaj opazite?
54. *V isti koordinatni sistem narišite grafe naslednjih funkcij tako, da najprej poiščete ničle in začetne vrednosti, nato pa skozi narišete premico:*
    a) $f(x) = 3x - 6$
    b) $f(x) = -5x - 5$
    c) $f(x) = 2x + 4$
55. *V isti koordinatni sistem narišite grafe naslednjih funkcij tako, da najprej poiščete ničle in začetne vrednosti, nato pa skozi narišete premico.*
    a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$
    b) $f(x) = -x + 1\frac{1}{2}$
    c) $f(x) = 0^{\cdot}25x + 1^{\cdot}25$
56. *Narišite graf funkcije* $f(x) = -2x + 5$ *in preverite, če točke* $T_1(0,1)$, $T_2(2,1)$ *in* $T_3(-1,-7)$ *ležijo na grafu.*
57. *Narišite graf funkcije* $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$. *Izračunajte tudi ničlo in začetno vrednost.*
58. *Narišite graf funkcije* $f(x) = -0^{\cdot}2x + 0^{\cdot}1$. *Izračunajte tudi ničlo in začetno vrednost.*
59. *Ali sta premici* $y_1 = 0^{\cdot}2x + 3^{\cdot}5$ *in* $y_2 = \frac{1}{5}x - 2$ *vzporedni?*
60. *Premici* $y = -x + \frac{1}{2}$ *zapišite enačbo vzporednice skozi točko* $T(2,-1)$. *Obe premici narišite v istem koordinatnem sistemu.*
61. *Premici* $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{3}$ *zapišite enačbo vzporednice skozi točko* $T(-1,-1)$. *Obe premici narišite v istem koordinatnem sistemu.*
62. *Graf funkcije* $f(x) = k \cdot x + 2$ *poteka skozi točko* $T(3,-1)$. *Poiščite predpis funkcije* $f(x)$.
63. *Premica* $y = \frac{1}{2}x + n$ *ima ničlo* $M(3,0)$. *Zapišite premico.*
64. *Začetna vrednost premice je* $\frac{1}{2}$, *abciso pa seka pri* $x_0 = 4$. *Poiščite smerni koeficient te premice.*
65. *Zapišite enačbo premice ki gre skozi točke.*
    a) $A(2,2)$ *in* $B(6,6)$
    b) $C(-2,-1)$ *in* $D(1,-2)$
    c) $E(-2,1)$ *in* $F(1,0)$
    d) $G(-7,1)$ *in* $H(1,7)$

Oblike enačbe premice

Eksplicitna oblika

Zapis premice $\mathbf{y}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{n}$, kjer sta $\mathbf{k},\mathbf{n}\in\mathbb{R}$, smo do sedaj že dobro spoznali. Tak zapis je jasen, saj se da lepo prebrati, kje premica seka ordinato in kolikšen je naklon premice.
Enačbo oblike:

$$\mathbf{y}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{n};\qquad \mathbf{k},\mathbf{n}\in\mathbb{R}$$

imenujemo **eksplicitna enačba premice**. Pomeni pa, da pri konstantnem smernem koeficientu in konstantni začetni vrednosti, za vse točke $T(x,y)$, ki ležijo na tej premici, velja enačba $\mathbf{y}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{n}$.

Dokaz je razmeroma preprost, če imamo eksplicitno zapisano enačbo:

$$y=kx+n$$

in neko točko $T(x_1,y_1)$, za katero trdimo da je na premici. Torej zanjo velja:

$$y_1=kx_1+n.$$

Enačbi odštejemo in dobimo:

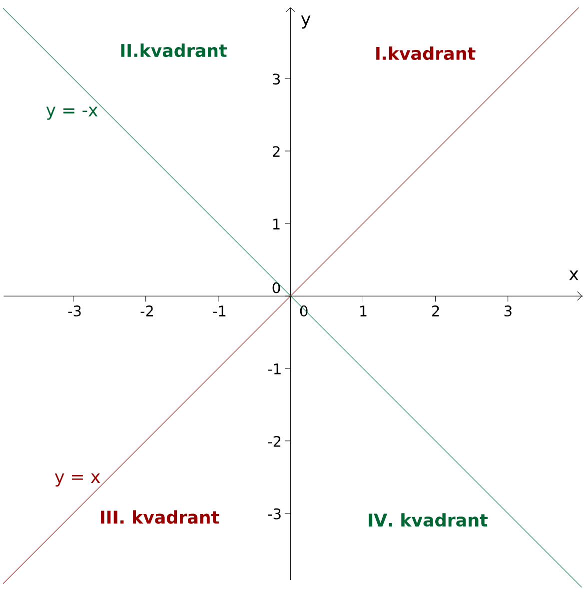
$$\begin{aligned} y-y_1 &= kx-kx_1 \\ y-y_1 &= k(x-x_1). \end{aligned}$$

Če sedaj v to vstavimo katerokoli točko, za katero trdimo, da je na premici, vidimo, da zanjo predpis velja.

Posebna primera:

Premico, katere enačba je $\mathbf{y}=\mathbf{x}$, imenujemo simetrala lihih kvadrantov (razpolavlja I. in III. kvadrant – na sliki desno rdeča premica).

Premico, katere enačba je $\mathbf{y}=-\mathbf{x}$, imenujemo simetrala sodih kvadrantov (razpolavlja II. in IV. kvadrant – na sliki desno zelena premica).



Slika 25: Simetrali kvadrantov

Odsekovna oblika

Eksplicitni zapis premice je sicer jasen, vendar kadar želimo narisati premico (ki ni vzporedna nobeni izmed koordinatnih osi in ne gre skozi izhodišče), opazimo, da obstaja enostavnejša oblika zapisa premice:

$$\mathbf{\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1; \quad m, n \in \mathbb{R} \wedge m, n \neq 0.}$$

Imenujemo ga **odsekovni zapis enačbe premice** (ali **segmentni** zapis). V tej enačbi realno število $\mathbf{m} \in \mathbb{R}$ pove, kje seka premica abcisno os, realno število $\mathbf{n} \in \mathbb{R}$ pa pove, kje seka premica ordinatno os.

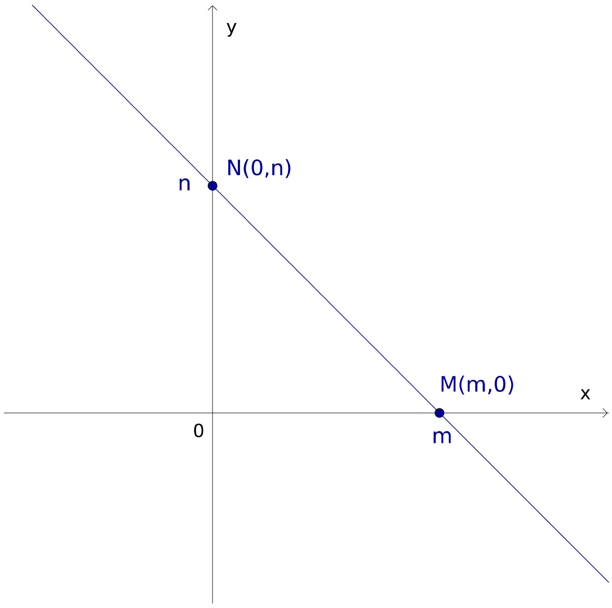
To lahko dokažemo razmeroma preprosto. Vzamemo eksplicitno obliko $y = kx + n$, ter ničlo $M(m, 0)$ in začetno vrednost $N(0, n)$. Spomnimo se, da se da ničlo zapisati $m = -\frac{n}{k}$; z malo preurejanja dobimo

$$k = -\frac{n}{m}.$$

Znano vstavljamo v eksplicitno obliko enačbe premice:

$$\begin{aligned} y &= kx + n \\ y &= -\frac{n}{m}x + n \quad / : n \\ \frac{y}{n} &= -\frac{x}{m} + 1 \\ \frac{x}{m} + \frac{y}{n} &= 1. \end{aligned}$$

Pridemo do željene oblike, kjer je m presečišče na abcisni osi, n pa presečišče na ordinatni os (pazimo še, da nista enaka 0).



Slika 26: Odseki koordinatnih osi

ZGLED:

Zapišite enačbo premice $y = -x + 2$ v odsekovni obliki.

Rešitev:
Premica je zapisana eksplicitno ($y = kx + n$), razberemo, da je začetna vrednost $n = 2$.

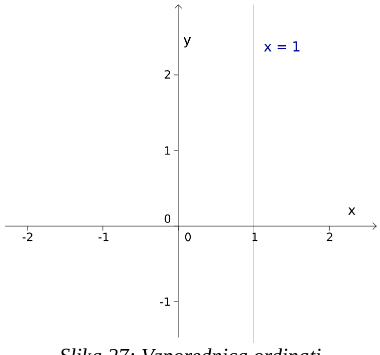
Izračunamo še ničlo (lahko tudi tako):

$$m = -\frac{n}{k} = -\frac{2}{(-1)} = 2;$$

sedaj še sestavimo odsekovno enačbo:v$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1.$

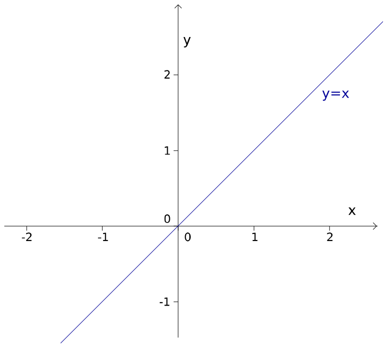
Implicitna oblika

Pri eksplicitnem ($y = kx + n$) zapisu premice opazimo, da ne moremo izraziti premic, ki so vzporedne ordinatni osi.



Slika 27: Vzporednica ordinati

Npr: $x = 1$ - ta premica ni graf linearne funkcije, saj za $x = 1$ obstaja neskončno mnogo y (*spomnite se, da smo povedali, da je funkcija predpis, ki nekemu originalu priredi natanko eno sliko*).



Slika 28: Simetrala y=x

Pri odsekovni obliki ($\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$) pa ne moremo izraziti premic, ki bi šle skozi izhodišče koordinatnega sistema.

Npr: v primeru $y = x$ bi naleteli na nesmisel zapisan v obliki enačbe: $\frac{x}{0} + \frac{y}{0} = 1$.

Da odpravimo omenjene težave, pridemo do oblike enačbe premice:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}.$$

Za tako zapisano premico rečemo, da je zapisana **implicitno**. Z implicitno obliko zapisa enačbe premice lahko zapišemo **vse** premice.

Za vse premice, zapisane v eksplicitni ali odsekovni obliki, lahko zapišemo njihovo implicitno obliko enačbe premice. Za vse implicitno zapisane premice pa ne obstaja vedno možnost zapisa v eksplicini ali odsekovni obliki.

ZGLED:

(Primer 1) Zapišite enačbo premice $y = -x + 2$ v implicitni obliki.

Rešitev:
Enostavno „izničimo“ zapis:

$$\begin{aligned} y &= -x + 2 \\ x + y - 2 &= 0; \end{aligned}$$

v tem primeru je $a = 1$, $b = 1$ *in* $c = -2$.
(Primer 2) Zapišite enačbo premice $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$ v implicitni obliki.

Rešitev:
Enačbo najprej pomnožimo, nato pa podobno kot zgoraj uredimo:

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{3} - \frac{y}{2} &= 1 \quad / \cdot 6 \\
2x - 3y &= 6 \\
2x - 3y - 6 &= 0 \quad a = 2, b = -3, c = -6.
\end{aligned}
$$

<u>(Primer 3)</u> Zapišite enačbo premice $3x - y = 0$ v eksplicitni in odsekovni obliki.

Rešitev:
Da zapišemo zgornjo enačbo eksplicitno, izraz le preuredimo v obliko $y = kx + n$*:*

$$
\begin{aligned}
3x - y &= 0 \\
y &= 3x.
\end{aligned}
$$

Odsekovna oblika za to premico pa ne obstaja – premica poteka skozi izhodišče koordinatnega sistema.

<u>VAJE</u>

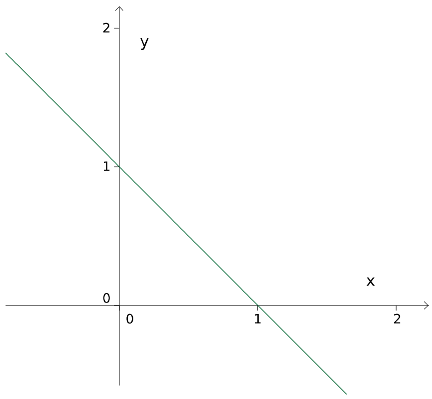
♠ <u>**Priporočilo**: premice iz spodnjih nalog tudi narišite!</u>

66. *Zapišite vse tri oblike enačbe premice, ki gredo skozi.*
    a) $A(2,1)$*in* $B(4,5)$
    b) $C(\frac{1}{2},1)$ *in* $D(\frac{5}{2},2)$
    c) $E(0{\cdot}5, 0{\cdot}5)$ *in* $F(-0{\cdot}75, 3)$
67. *Zapišite vse tri oblike enačbe premice, za katero velja, da poteka skozi* $T(3,4)$ *in veš da ima začetno vrednost* $n = 1$.
68. *Zapišite vse tri oblike enačbe premice, za katero velja, da poteka skozi* $T(-3,-4)$*, in veš, da ima začetno vrednost* $n = 1$.
69. *Zapišite vse tri oblike enačbe premice, za katero velja, da poteka skozi* $T(\frac{5}{4}, \frac{9}{4})$*, in veš, da ima začetno vrednost* $n = \frac{13}{4}$.
70. *Zapišite vse tri oblike enačbe premice, ki ima ničlo M(2,0) in začetno vrednost N(0,-4).*
71. *Zapišite vse tri oblike enačbe premice, ki ima ničlo* $M(-3{\cdot}5, 0)$ *in začetno vrednost* $N(0, 2{\cdot}5)$.
72. *Zapišite vse tri oblike enačbe premice, ki abciso seka pri* $x = \frac{1}{4}$*, ordinato pa pri* $y = -\frac{5}{4}$.
73. *Zapišite eksplicitno obliko enačbe premice, ki je vzporedna simetrali lihih kvadrantov in poteka skozi točko* $T(-3,1)$.
74. *Zapišite odsekovno obliko enačbe premice, ki je vzporedna simetrali sodih kvadrantov in seka abciso pri* $x = 1{\cdot}25$.
75. *Zapišite implicitno obliko enačbe premice, ki je vzporedna premici z enačbo* $3x - 4y - 2 = 0$ *in gre skozi točko* $T(4,5)$.
76. *Premica seka simetralo sodih kvadrantov pri x=2 in ima začetno vrednost N(0,2). Zapišite enačbo premice v vseh možnih oblikah? V kateri izmed spoznanih oblik te premice ne morete zapisati? Zakaj?*
77. *Premica seka simetralo lihih kvadrantov pri x=3 in poteka skozi točko (-1,1). Zapišite to premico v implicitni obliki.*
78. *Premico z enačbo:* $y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{4}$ *zapišite v implicitni in segmentni obliki.*

79. Premico $-2x-3y+5=0$ zapišite v eksplicitni in odsekovni obliki.

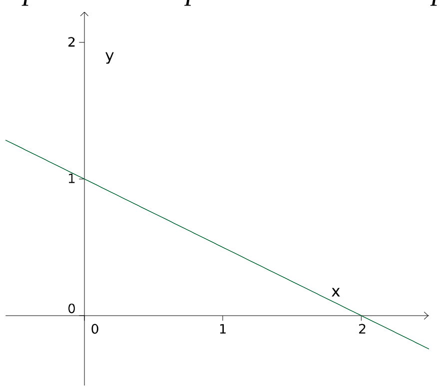
80. Premico $-\frac{4x}{3}+\frac{2y}{3}=1$ zapišite v implicitni obliki.

81. Zapišite enačbo premice iz slike v segmentno obliko.

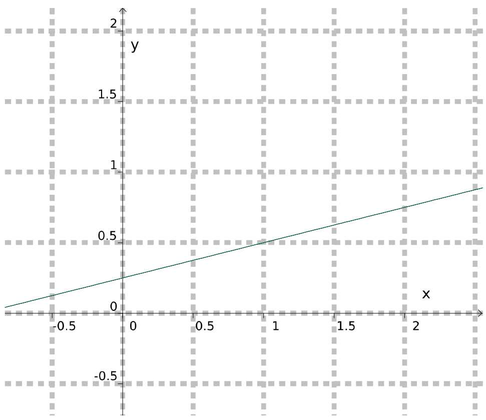


82. Zapišite enačbo premice iz slike v eksplicitno obliko.

83. Zapišite enačbo premice iz slike v eksplicitno



obliko.



84. Za katero realno število $t \in \mathbb{R}$ bosta premici $2x-ty+1=0$ in $y=2x+4$ vzporedni?

85. Za katero realno število $a \in \mathbb{R}$ bodo točke $A(a,2)$, $B(1,1)$ in $C(3,-\frac{1}{2})$ ležale na isti premici? Zapiši enačbo te premice v odsekovni obliki.

86. Za kateri parameter t bo premica $\frac{2x}{3}+\frac{y}{t}=1$ omejevala s koordinatnima osema trikotnik s ploščino 3 kvadratne enote?

Linearna enačba in neenačba

V tem razdelku bomo spoznali reševanje sistemov linearnih enačb in si rezultat interpretirali kot presečišče premic. Linearne enačbe smo v bistvu že spoznali, ko smo iskali ničle in začetne vrednosti, ter imeli z njimi opravka v vseh poglavjih, zato bo poudarek tukaj na sistemih enačb in presečiščih premic.
Drugi del razdelka je pa dodatek o linearnih neenačbah.

Sistem linearnih enačb

Pri iskanju presečišča dveh premic $y = k_1 \cdot x + n_1$ in $y = k_2 \cdot x + n_2$ „bode“ v oči, da lahko enačimo predpisa:

$$k_1 \cdot x + n_1 = k_2 \cdot x + n_2.$$

Rezultat, ki ga dobimo, je abcisa presečišča premic, nato le še izračunamo ordinato presečišča s pomočjo enega izmed predpisov premic. Tak način, ko eno izmed neznank iz ene enačbe izrazimo in vstavimo v drugo, imenujemo **zamenjalni način** reševanja sistemov enačb.
Kot bomo videli kasneje, je dostikrat uporaben, včasih pa je elegantnejša metoda nasprotnih koeficientov, ki jo bomo spoznali kasneje.

ZGLED:

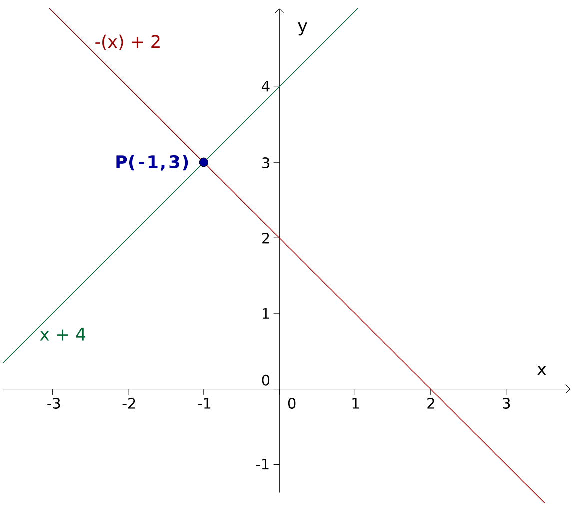
Poiščite presečišče premic $y_1 = -x + 2$ in $y_2 = x + 4$.

Rešitev:

Premici enačimo ($y_1 = y_2$) in rešimo dobljeno enačbo:

$$\begin{aligned} -x + 2 &= x + 4 \\ -x - x &= 4 - 2 \\ -2x &= 2 \quad / : (-2) \\ x &= -1. \end{aligned}$$

Dobljeni $x = -1$ vstavimo npr. v prvo premico in dobimo $y = 3$.
Zapišemo še koordinati presečišča $P(-1, 3)$. Rešitev lahko predstavimo tudi s sliko (slika desno).



Slika 29: Primer 1

Če bi imeli premici podani v implicitni obliki (ali katerikoli obliki), bi hitro ugotovili, da se splača eno enačbo malo „prirediti“ (pomnožiti, deliti) in jo nato odšteti od druge. Takemu načinu reševanja enačb pravimo **metoda nasprotnih koeficientov**. Splošno gledano rešujemo sistem enačb oblike:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2, \end{aligned}$$

kjer so $a_{1,2}, b_{1,2}, c_{1,2} \in \mathbb{R}$.

Metoda nasprotnih koeficientov je opisana na primeru spodaj.

ZGLED:

Poiščite presečišče premic $x + 2y + 1 = 0$ in $2x - y + 7 = 0$.

Rešitev:
Enačbi podpišemo eno pod drugo in drugo enačbo pomnožimo z 2:

$$\begin{aligned} x + 2y + 1 &= 0 \\ 2x - y + 7 &= 0 \quad / \cdot 2. \end{aligned}$$

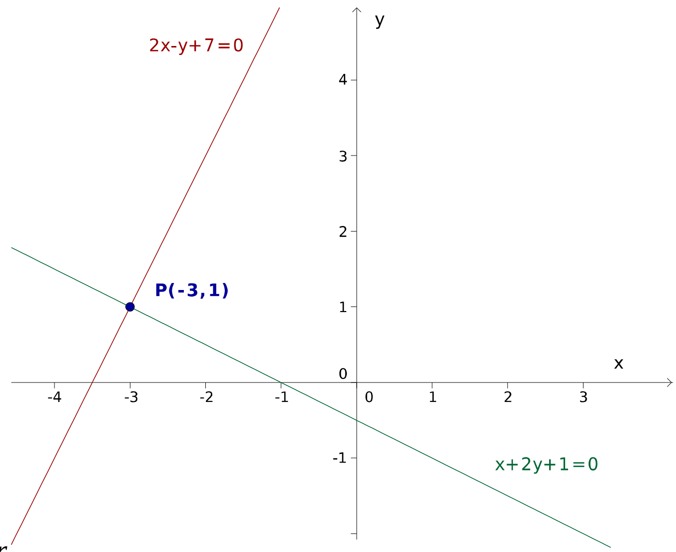
Nato enačbi seštejemo:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 1 = 0 \\ 4x - 2y + 14 = 0 \end{aligned}\right\} +$$
$$5x + 15 = 0$$

in rešimo dobljeno preprosto enačbo:

$$\begin{aligned} 5x &= -15 \\ x &= -3. \end{aligned}$$

Rešitev vstavimo v eno izmed danih enačb ter izračunamo še ordinato presečišča. Dobimo $y = 1$.



Slika 30: Primer 2

♠ *Sistem enačb je lahko tudi:*

***Nedoločen** (kadar sta enačbi identični) – vse točke na premici so rešitve sistema.*

$$\begin{aligned} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{aligned}$$

če drugo enačbo delimo z 2 *vidimo, da sta enaki.*

***Protisloven** – premici sta vzporednici – nimata skupnih točk.*

$$\begin{aligned} y = 2x - 1 \\ y = 2x + 1 \end{aligned}$$

Premici sta vzporedni (enak smerni koeficient $k = 2$*).*

Presečišče je torej $P(-3, 1)$.

Linearne neenačbe

Če imamo v zapisu premice neenačaj ($<, >, \leq, \geq$), govorimo o tem, da iščemo množico urejenih parov (x,y) v koordinatnem sistemu, za katere zveza velja.

Če imamo podano:

- $y < kx + n$, so rešitev točke, ki ležijo pod premico;
- $y > kx + n$, so rešitev točke, ki pa ležijo nad premico.

♠ **Spomni se**:

Rešitev linearne enačbe oblike $\mathbf{ax + b < cx + d}$ je interval na številski osi.

Primer:

$$\begin{aligned} 2x &< 1 + x \\ 2x - x &< 1 \\ x &< 1 \end{aligned}$$

ZGLED:

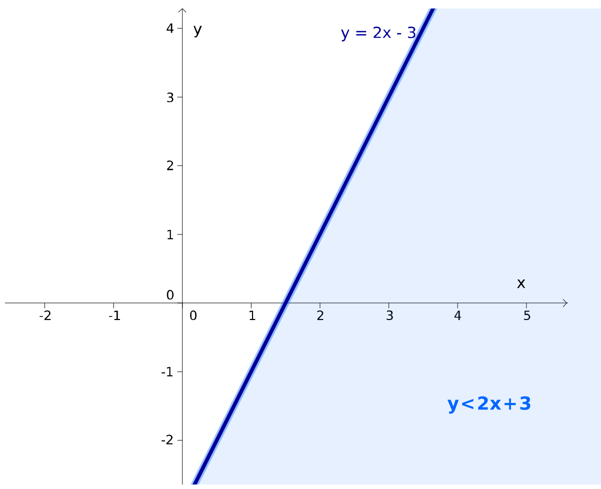
Poiščite množico točk, za katero velja $6x - 3y \geq 9$.

Rešitev:

Najprej preuredimo neenačbo:

$$\begin{aligned} 6x - 3y &\geq 9 \\ -3y &\geq -6x + 9 \quad / : (-3) \\ y &\leq 2x - 3 \end{aligned}$$

Ker v neenačbi nastopa $\leq$*, rešitvi pripada tudi premica z enačbo* $y = 2x - 3$*. V koordinatni sistem narišemo premico (z odebeljeno črto – če bi premica ne pripadala rešitvi, bi risali črtkano) in označimo množico pod premico (slika desno).*



Slika 31: Množica točk

VAJE

87. *Poiščite presečišče premic z enačbama* $y = x + 1$ *in* $y = -2x + 7$. *Vse skupaj narišite v koordinatni sistem.*
88. *Poiščite presečišče premic z enačbama* $y = x$ *in* $y = 4x - 3$. *Vse skupaj narišite v koordinatni sistem.*
89. *Zapiši koordinate presečišča* P *premic* $y = 2x - 1$ *in* $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. *Vse skupaj natančno narišite v koordinatni sistem.*
90. *Rešite sistem enačb in rešitev (in enačbi) narišite v koordinatnem sistemu.*
$$2x - y + 3 = 0$$
$$x - 2y - 6 = 0$$
91. *Rešite sistem enačb ter rešitev (in enačbi) narišite v koordinatnem sistemu.*
$$3x + 4y - 1 = 0$$
$$2x - 3y + 16 = 0$$
92. *Rešite sistem enačb ter rešitev (in enačbi) narišite v koordinatnem sistemu.*
$$\frac{x}{6} - \frac{y}{4} = 1$$
$$x + \frac{y}{3} = 1$$
93. *Rešite sistem enačb ter rešitev (in enačbi) narišite v koordinatnem sistemu.*
$$\frac{2x}{5} + \frac{y}{4} = 1$$
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$
94. *Zapišite enačbo premice, ki poteka skozi presečišče premic* $y = -2x + 5$ *in* $y = x + 1$ *ter gre skozi koordinatno izhodišče.*
95. *Zapišite segmentno obliko enačbe premice, ki seka abcisno os pri* $x = 3$ *in gre skozi presečišče premic* $x - y + 3 = 0$ *in* $6x + 3y - 9 = 0$.

96. *Za katero število* $t \in \mathbb{R}$ *se bosta premici z enačbama* $x - (t + 3)y - 2 = 0$ *in* $3tx - y + 1 = 0$ *sekali na abcisni osi? Poiščite presečišče.*
97. *Za katero število* $t \in \mathbb{R}$ *se bosta premici z enačbama* $(t - 1)x - 2ty - 1 = 0$ *in* $tx + y + 5 = 0$ *sekali na ordinatni osi?*
98. *Za katero realno vrednost parametra t se bosta premici* $(t + 1)x - (1 + 2t)y + 3 = 0$ *in* $(2 - t)x - ty + 1 = 0$ *sekali na simetrali lihih kvadrantov?*
99. *Narišite množico točk, za katero velja* $y < 3x + 1$.
100. *Narišite množico točk, za katero velja* $y \geq -x - 2$.
101. *Narišite množico točk, za katero velja* $2x + 12 < 4y$.
102. *Narišite množico točk, za katere velja* $y > 2$ *in* $2x > y + 5$.
103. *Narišite množico točk, za katero velja* $x \geq -2, 7 - y \leq 2x$ *in* $3x - 2y - 2 < 0$.